

***Imagerie du proche sous-sol
par un radar géologique***

Guillaume Vigo , Michel Kern

N° 3255

Septembre 1997

_____ THÈME 4 _____



***apport
de recherche***

Imagerie du proche sous-sol par un radar géologique

Guillaume Vigo* , Michel Kern

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Estime

Rapport de recherche n° 3255 — Septembre 1997 — 47 pages

Résumé : Ce travail a pour objet la modélisation numérique de la propagation des ondes électromagnétiques dans le proche sous-sol, à des fins de repérage d'objets enfouis, et de produire des images du sous-sol, en utilisant des méthodes inspirées de la sismique.

La modélisation utilise la méthode de Yee pour résoudre les équations de Maxwell 2D par différences finies dans le domaine temporel. Grâce aux techniques d'états adjoints, on peut ensuite calculer des images du sous-sol, montrant où se trouvent des objets enterrés. Le caractère conducteur du sous-sol rendant le phénomène irréversible en temps, on utilise une technique due à Griewank pour minimiser le nombre de simulations, compte tenu de la place mémoire disponible.

Mots-clé : Electromagnétisme, différences finies, radar géologique, détection d'objets enterrés, état adjoint

(Abstract: pto)

Ce travail est le mémoire de DEA de Mathématiques Appliquées à l'Ingénierie de l'Université de Paris IX Dauphine, de G. Vigo. Il a été réalisé dans le cadre du projet PROMETHEE, piloté par le Département Génie Informatique et Mathématiques Appliquées (DÉGIMA) de la direction de la recherche de GDF à Saint-Denis. Il est paru en tant que rapport interne Gaz de France sous la référence M DÉGIMA/GMS1733.GV/TA

* Université Paris IX Dauphine, INRIA, Gaz de France

Unité de recherche INRIA Rocquencourt

Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)

Téléphone : (33) 01 39 63 55 11 – Télécopie : (33) 01 39 63 53 30

Imaging of the Near Subsurface Using a Geologic Radar

Abstract: This work presents the numerical modeling of experiments using a geologic radar to probe the near subsurface, to locate buried objects such as gas pipes.

Modeling is based on Yee's FDTD algorithm to solve the 2D Maxwell's equations. Then, using adjoint state techniques, we produce images of the subsurface, showing the location of the buried objects. Because the subsurface is conductive, the propagation is irreversible. We have to resort to a technique due to Griewank to minimize the number of simulations, given the available memory

Key-words: Electromagnetism, finite differences, geologic radar, detection of buried objects, adjoint state

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introduction | 4 |
| 1.1 | Lois de comportement dans les matériaux diélectriques | 5 |
| 1.2 | Modélisation des propriétés de conductivité | 6 |
| 1.3 | Réécriture du modèle mathématique en tenant compte des propriétés du matériau | 7 |
| 2 | Méthode numérique pour la simulation | 8 |
| 2.1 | Schéma de Yee | 10 |
| 2.2 | Stabilité et dispersion du schéma | 16 |
| 2.3 | Résultats Numériques | 17 |
| 3 | Synthèse Bibliographique | 24 |
| 3.1 | Méthode “Synthetic aperture imaging” | 25 |
| 3.2 | Méthode de diffraction tomographique | 26 |
| 3.3 | Méthode de Born | 26 |
| 4 | Problème Inverse | 29 |
| 4.1 | Calcul de l’état adjoint en continu | 30 |
| 4.2 | Calcul de l’état adjoint discret | 33 |
| 4.3 | Algorithmes de calcul de l’état adjoint | 37 |
| 4.4 | Résultats Numériques | 42 |
| A | Annexe | 45 |

1 Introduction

Dans un premier temps nous allons introduire les équations de Maxwell. La section (2) expose la technique mise en oeuvre pour obtenir un résultat; elle présente la méthode de résolution des équations de Maxwell choisie: une méthode de différences finies ou Finite Difference Time Domain (FDTD), elle présente aussi quelques uns des résultats obtenus. Puis un résumé rapide des diverses documentations (sur le problème inverse) étudiées est fait dans la section (3). Enfin la section (4) présente la méthode de résolution utilisée pour résoudre le problème inverse.

Nous nous intéressons dans ce projet, à des phénomènes électromagnétiques. Ces phénomènes se décrivent à l'aide des équations de Maxwell.

Un champ électromagnétique est décrit par un quadruplet de champs de vecteurs dans un domaine Ω de \mathbf{R}^3 :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{E}(x, t) & : \text{champ électrique en Volts/mètre} \\ \vec{H}(x, t) & : \text{champ magnétique en Ampères/mètre} \\ \vec{D}(x, t) & : \text{champ d'induction électrique en Coulombs/mètre}^2 \\ \vec{B}(x, t) & : \text{champ d'induction magnétique en Webers/mètre}^2 \end{array} \right. \quad (1)$$

Dans ce qui précède, x désigne le point courant de $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ et $t \geq 0$ désigne le temps. Ces champs de vecteurs sont reliés à:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho(x, t) & : \text{densité de charge électrique en Coulombs/mètre}^3 \\ \vec{j}(x, t) & : \text{densité de courant en Ampères/mètre}^2 \end{array} \right. \quad (2)$$

Les variations en espace et en temps de ces diverses quantités sont régies par les équations de Maxwell:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot } \vec{E} = 0 \\ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \text{rot } \vec{H} + \vec{j} = 0 \\ \text{div } \vec{D} = \rho \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

En prenant la divergence de (3.2), en dérivant (3.3) par rapport au temps et en ajoutant membre à membre les deux équations obtenues, on obtient l'équation:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0 \quad (4)$$

qui exprime que les densités ρ et \vec{j} sont reliées par la loi de conservation de la charge électrique.

Les équations (3) et (4) ne suffisent pas à caractériser le champ électromagnétique. Il convient de :

- (i) décrire les lois de comportement du matériau qui vont permettre de relier les champs \vec{D} et \vec{E} d'une part, les champs \vec{B} et \vec{H} d'autre part.
- (ii) décrire les propriétés de conduction du matériau qui vont induire une relation entre la densité de courant \vec{j} et le champ électrique \vec{E} .

1.1 Lois de comportement dans les matériaux diélectriques

Nous nous contenterons ici de décrire les lois de comportement des matériaux les plus simples, à savoir les lois des matériaux linéaires isotropes sans perte. Ces hypothèses entraînent que \vec{D} , respectivement \vec{B} , est proportionnel à \vec{E} , respectivement \vec{H} . On introduit alors deux fonctions scalaires $\varepsilon(x)$ et $\mu(x)$ telles que l'on ait en tout point et à tout instant :

$$\begin{cases} \vec{D}(x, t) = \varepsilon(x) \vec{E}(x, t) \\ \vec{B}(x, t) = \mu(x) \vec{H}(x, t) \end{cases} \quad (5)$$

où par définition :

$$\begin{cases} \varepsilon(x) & \text{est la permittivité diélectrique du milieu en Farads/mètre} \\ \mu(x) & \text{est la perméabilité magnétique du milieu en Henrys/mètre} \end{cases}$$

La dépendance en x de ces coefficients caractérise une éventuelle hétérogénéité du milieu de propagation. Lorsque ε et μ sont constants, on dit que le milieu est homogène. Le vide est un milieu homogène particulier. Dans ce cas on a :

$$\begin{cases} \varepsilon(x) = \varepsilon_0 = (36\pi 10^9)^{-1} \text{ en Farads/mètre} \\ \mu(x) = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ en Henrys/mètre} \end{cases} \quad (6)$$

La vitesse de propagation c_0 des ondes dans le vide est donnée par :

$$\varepsilon_0 \mu_0 c_0^2 = 1 \quad (7)$$

ce qui donne numériquement la valeur bien connue pour la vitesse de la lumière :

$$c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (8)$$

Un milieu quelconque est souvent représenté "relativement" au vide. Ainsi on pose :

$$\begin{cases} \varepsilon(x) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(x) \\ \mu(x) = \mu_0 \mu_r(x) \end{cases} \quad (9)$$

où par définition :

$$\begin{cases} \varepsilon_r(x) & \text{est la permittivité diélectrique relative} \\ \mu_r(x) & \text{est la perméabilité magnétique relative} \end{cases}$$

à partir de quoi on définit l'indice du milieu (par rapport au vide) par :

$$n(x) = \sqrt{\frac{\varepsilon(x)\mu(x)}{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_r(x)\mu_r(x)} \quad (10)$$

De la même façon que l'on a défini en (7) la vitesse de propagation des ondes dans le vide, on peut définir en tout point x la vitesse de propagation locale des ondes électromagnétiques dans un matériau par :

$$\varepsilon(x) \mu(x) c(x)^2 = 1 \quad (11)$$

Il est alors facile de voir que $c(x)$ est liée à la vitesse c_0 dans le vide par :

$$c(x) = \frac{c_0}{n(x)} \quad (12)$$

Ce qui montre que plus un milieu a un indice élevé, plus les ondes électromagnétiques s'y propagent lentement.

1.2 Modélisation des propriétés de conductivité

Il convient en général de diviser la densité de courant \vec{j} en deux parties :

$$\vec{j}(x, t) = \vec{j}_s(x, t) + \vec{j}_c(x, t) \quad (13)$$

où \vec{j}_s est un courant source, qui dans la pratique sera une donnée des problèmes que l'on aura à résoudre, courant imposé de façon "extérieure" et où \vec{j}_c est le courant de conduction, dû aux mouvements des électrons libres dans le matériau.

C'est la caractérisation de \vec{j}_c qui fait intervenir les propriétés intrinsèques du matériau. Le plus souvent, \vec{j}_c est relié au champ électrique \vec{E} par la loi d'Ohm :

$$\vec{j}_c(x, t) = \sigma(x)\vec{E}(x, t) \quad (14)$$

où, dans un milieu isotrope, $\sigma(x)$ est une quantité scalaire et positive appelée conductivité du matériau (unité le siemens/mètre). Lorsque $\sigma = 0$, le milieu est non conducteur. C'est par exemple le cas du vide. En général $\sigma > 0$ est synonyme de phénomènes d'absorption : une onde qui se propage dans un milieu conducteur est atténuée au cours de sa propagation. Ces phénomènes d'absorption sont très importants dans le sous-sol.

1.3 Réécriture du modèle mathématique en tenant compte des propriétés du matériau

On peut maintenant écrire un système d'équations où seuls vont intervenir les champs électrique et magnétique \vec{E} et \vec{H} . Ce modèle se compose essentiellement de deux équations d'évolution du premier ordre, tirées de (3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \text{rot } \vec{E} = 0 \\ \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E} - \text{rot } \vec{H} + \vec{j}_s = 0 \end{array} \right. \quad (15)$$

auxquelles on peut adjoindre les deux équations stationnaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } (\varepsilon \vec{E}) = \rho \\ \text{div } (\mu \vec{H}) = 0 \end{array} \right. \quad (16)$$

Le “on peut” se justifie dans la mesure où les équations (16) peuvent être considérées comme redondantes :

- l'équation $\rho = \text{div } (\varepsilon \vec{E})$ peut être considérée comme définissant la densité de charge électrique $\rho(x, t)$
- l'équation $\text{div } (\mu \vec{H}) = 0$ est une conséquence, à une dérivation par rapport au temps près, de la première équation de (15).

Les seules équations d'évolution (15) suffisent à déterminer de façon unique la solution (\vec{E}, \vec{H}) pourvu qu'on leur ait adjoint :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{—des conditions initiales en } t = 0 \\ \text{—des conditions aux limites sur } \Gamma = \partial\Omega \end{array} \right.$$

Pour être cohérent avec la physique, il faut se limiter aux solutions d'énergie finie c'est à dire aux solutions qui satisfont à tout instant :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int (\varepsilon |\vec{E}(x, t)|^2 + \mu |\vec{H}(x, t)|^2) dx < +\infty$$

où par définition $\mathcal{E}(t)$ désigne l'énergie électromagnétique de la solution à l'instant t .

2 Méthode numérique pour la simulation

Cette section expose la technique mise en oeuvre pour résoudre le problème direct, elle présente la méthode de résolution des équations de Maxwell choisie, une méthode de différences finies ou Finite Difference Time Domain (FDTD) (voir [1], [2], [3]).

Présentons le problème direct :

On cherche les valeurs des champs électriques et magnétiques en tout les points du domaine étudié en fonction du milieu.

Rappelons (voir chapitre 1) que l'évolution du champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{H}) dans un milieu continu, homogène, isotrope, linéaire est régie par les deux équations vectorielles suivantes :

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \text{rot } \vec{E} = 0 \\ \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E} - \text{rot } \vec{H} + \vec{j}_s = 0 \end{cases} \quad (17)$$

D'où le problème direct est le suivant :

$$\text{Trouver } (\vec{E}, \vec{H}) \text{ solution de (17) sur } \Omega \text{ en fonction des paramètres } (\varepsilon, \sigma) \quad (18)$$

où

\vec{E} est le champ électrique,

\vec{H} le champ magnétique,

Ω l'espace de résolution ($\partial\Omega$ est sa frontière),

(ε, σ) les paramètres du milieu.

En dimension trois, le problème direct revient à résoudre un ensemble de six Équations aux Dérivées Partielles (EDP) scalaires couplées.

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x - \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + j_s^{(x)} = 0 \\ \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y - \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + j_s^{(y)} = 0 \\ \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma E_z - \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) + j_s^{(z)} = 0 \\ \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} - \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) = 0 \\ \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) = 0 \\ \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} - \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Ce système de six équations peut se découpler en deux systèmes partiels de trois équations lorsque l'on peut faire l'hypothèse suivante :

Les champs et la cible étudiée sont invariants par rapport à une direction donnée. Dans notre cas comme nous le montrerons plus tard, nous avons choisi une invariance par rapport à l'axe O_y , (les dérivées par rapport à y sont nulles).

Les deux sous systèmes disjoints sont associés à deux polarisations indépendantes, la polarisation Transverse Électrique (TE) (le champ électrique \vec{E} reste dans le plan "transverse" Oxz orthogonal à la direction d'invariance Oy) et la polarisation Transverse Magnétique (TM) (le champ magnétique \vec{H} reste dans le plan "transverse" Oxz orthogonal à la direction d'invariance Oy). Ces deux sous systèmes décrivent alors les interactions électromagnétiques dans un environnement bidimensionnel.

Le système (TE) en (E_x, H_y, E_z) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x + \frac{\partial H_y}{\partial z} + j_s^{(x)} = 0 \\ \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma E_z - \frac{\partial H_y}{\partial x} + j_s^{(z)} = 0 \\ \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (20)$$

Le système (TM) en (H_x, E_y, H_z) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y - \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + j_s^{(y)} = 0 \\ \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \\ \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (21)$$

Désormais nous nous plaçons dans le cas de l'hypothèse bidimensionnelle, et cela pour plusieurs raisons :

- Pour des raisons techniques, l'extension d'un code 2D au cas 3D soulève de nombreux problèmes de mise en oeuvre sans rien apporter de nouveau quant aux concepts. De plus, cela nous laisse une plus grande latitude au niveau des simulations à venir puisque les temps de calcul et la mémoire nécessaires à l'implémentation d'un code 2D sont nettement plus faibles que pour un code 3D (si le temps de calcul en 2D est de l'ordre de n^3 alors en 3D il est au moins de l'ordre de n^4).

- On peut ensuite remarquer que le déplacement du radar s'effectuant suivant une ligne droite (que l'on désigne comme étant l'axe O_x), l'onde émise se propage alors dans le plan O_{xz} (où O_z est la profondeur). La plupart des tuyaux rencontrés coupent alors cette trajectoire et donc peuvent être considérés comme étant parallèle à l'axe O_y . De plus le radar émet lui aussi un champ électrique parallèle à l'axe O_y , nous pouvons donc considérer le milieu comme étant invariant par rapport à cette direction.

Malgré tout cette hypothèse présente des limites, on ne modélise pas très bien le milieu en le supposant invariant par rapport à l'axe O_y .

Le radar émettant un champ électrique parallèle à l'axe O_y nous résoudrons le système (TM) en (H_x, E_y, H_z) .

2.1 Schéma de Yee

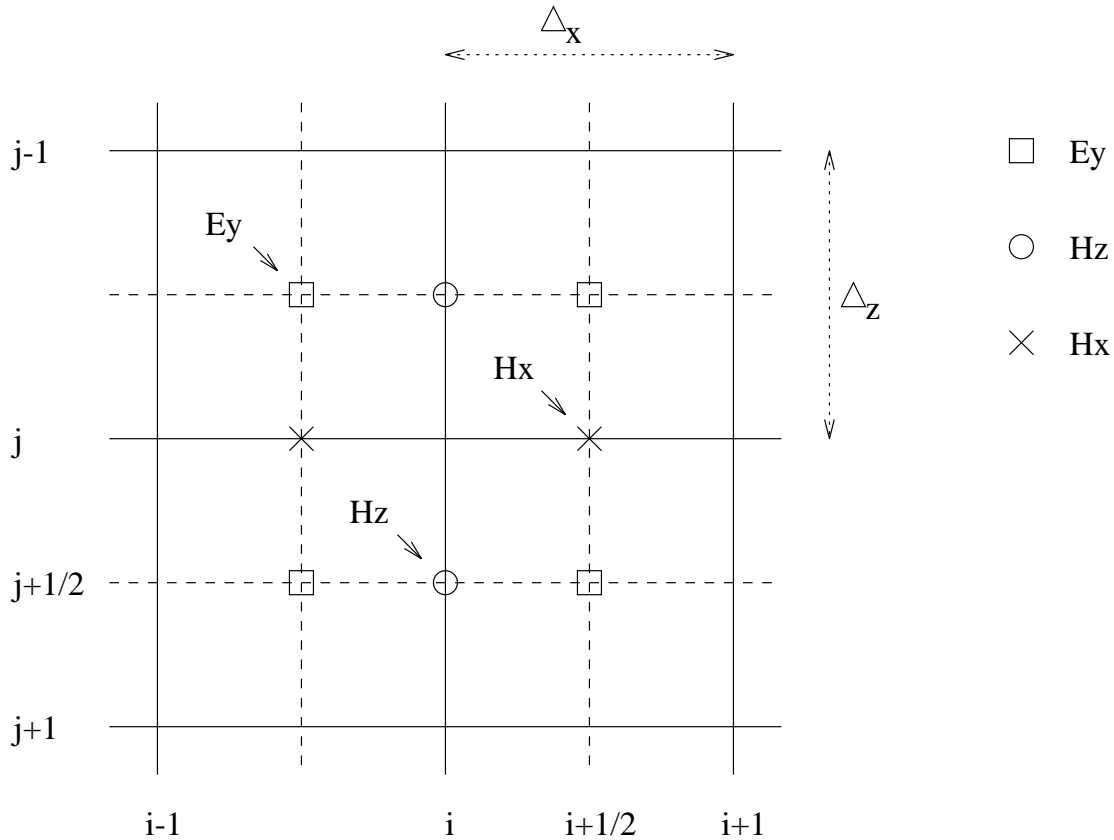


FIG. 1: Grilles de calcul, et positions des champs

Nous avons opté pour une méthode temporelle, il nous a fallu choisir dans l'éventail des méthodes instationnaires celle qui convenait le mieux à notre problème. Les méthodes par éléments finis présentent l'avantage de modéliser avec précision des surfaces limites courbes, mais à un coût prohibitif pour notre problème. Par ailleurs, à l'heure actuelle, les dimensions des objets traités limitent l'utilisation de ces méthodes.

Nous nous sommes donc tournés vers une méthode de discrétisation par différences finies des équations de Maxwell, et nous avons choisi d'utiliser un algorithme formulé par Yee en 1968

[3]. Cela pour des considérations de taille des problèmes à prendre en compte, de vitesse d'exécution, de facilité d'implémentation, pour le fait que cet algorithme est parfaitement adapté à la discrétisation des équations de Maxwell et enfin par ce que cet algorithme est réputé robuste.

Nous allons présenter cette méthode, ses caractéristiques, et nous intéresser à sa mise en oeuvre.

Nous nous plaçons donc en dimension deux, nous découpons le domaine de calcul Ω (le sol) en une grille régulière rectangulaire. Cette grille ne pouvant être infinie, elle est composée de $(n_x - 1) \cdot (n_z - 1)$ cellules de taille $(\Delta x, \Delta z)$, où Δx et Δz sont respectivement les pas de discrétisation le long des axes O_x et O_z . Le fait que la grille ne soit pas infinie entraîne la nécessité d'avoir des conditions aux bords absorbantes. Chacune des composantes des champs E et H est évaluée à un endroit spécifique de la grille de calcul, décalée par rapport aux autres. Le champ magnétique est tangentiel au milieu de chaque arête de la cellule, le champ électrique est normal au centre de chaque cellule. Nous avons donc en fait besoin de trois grilles de calcul qui nous définissent trois espaces de suites de fonctions.

Il nous faut donc une grille de calcul pour :

- le champ électrique E_y , tel que $E_y|_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})} = E_y((i + \frac{1}{2})\Delta x, (j + \frac{1}{2})\Delta z)$,
- le champ magnétique horizontal H_x , tel que $H_x|_{(i+\frac{1}{2}, j)} = H_x((i + \frac{1}{2})\Delta x, j\Delta z)$,
- le champ magnétique vertical H_z , tel que $H_z|_{(i, j+\frac{1}{2})} = H_z(i\Delta x, (j + \frac{1}{2})\Delta z)$.

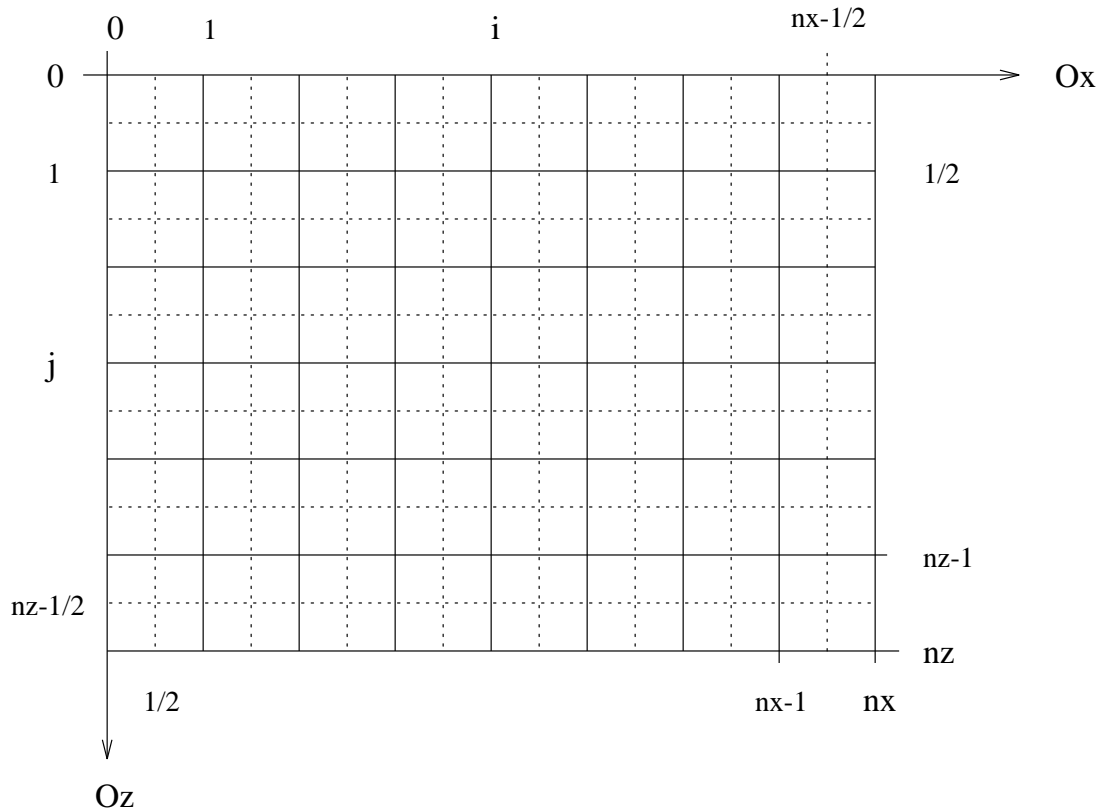


FIG. 2: *Maillage*

La discrétisation des dérivées partielles par rapport à x et z ne présente alors aucune difficulté :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H_x}{\partial z} \Big|_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})} &= \frac{H_x|_{(i+\frac{1}{2}, j+1)} - H_x|_{(i+\frac{1}{2}, j)}}{\Delta z} + O(\Delta z^2) \\
 \frac{\partial H_z}{\partial x} \Big|_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})} &= \frac{H_z|_{(i+1, j+\frac{1}{2})} - H_z|_{(i, j+\frac{1}{2})}}{\Delta x} + O(\Delta x^2) \\
 \frac{\partial E_y}{\partial x} \Big|_{(i, j+\frac{1}{2})} &= \frac{E_y|_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})} - E_y|_{(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}}{\Delta x} + O(\Delta x^2) \\
 \frac{\partial E_y}{\partial z} \Big|_{(i+\frac{1}{2}, j)} &= \frac{E_y|_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})} - E_y|_{(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2})}}{\Delta z} + O(\Delta z^2)
 \end{aligned} \tag{22}$$

La figure suivante illustre ce calcul, en détaillant les différentes grilles mises en jeu.

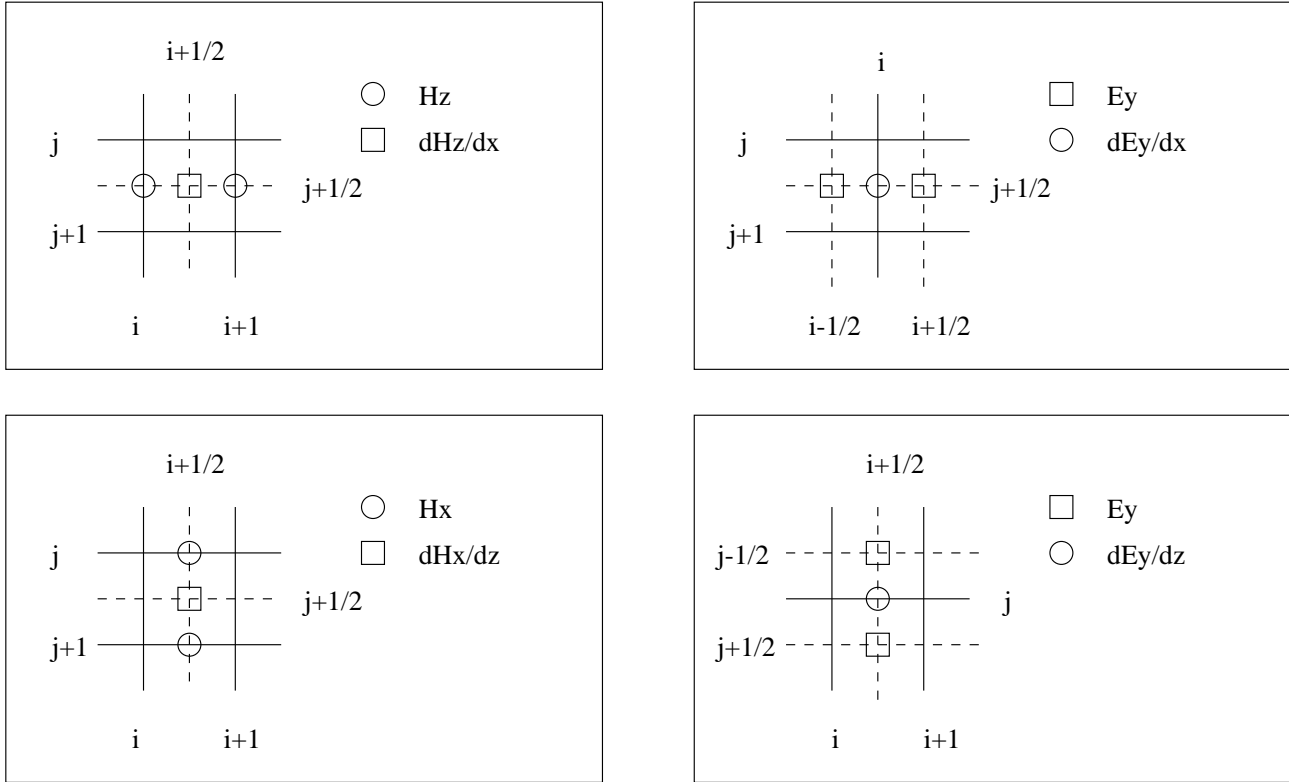


FIG. 3: *Discretisation des dérivées spatiales*

On ajoute à cette discrétisation en espace une discrétisation en temps de type saute-mouton (Δt est le pas de discrétisation en temps et n_t le nombre de pas de temps effectuées), c'est-à-dire que le champ électrique est calculé un demi pas de temps consécutivement au calcul des champs magnétiques. En tenant compte du fait que le calcul des composantes des champs électriques et magnétique s'effectue avec un décalage d'un demi pas de temps, les dérivées partielles par rapport au temps s'écrivent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_x}{\partial t}\Big|^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{H_x|^{n+1} - H_x|^{n}}{\Delta t} + O(\Delta t^2) \\ \frac{\partial E_y}{\partial t}\Big|^n &= \frac{E_y|^{n+\frac{1}{2}} - E_y|^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + O(\Delta t^2)\end{aligned}\tag{23}$$

On a donc les champs discrétisés suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (H_x|_{i+\frac{1}{2},j}^n)_{i,j,n} & \text{tel que } i \in [1..nx-1], j \in [1..nz], n \in [1..nt], \\ (E_y|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})_{i,j,n} & \text{avec } i \in [1..nx-1], j \in [1..nz-1], n \in [1..nt], \\ (H_z|_{i,j+\frac{1}{2}}^n)_{i,j,n} & \text{où } i \in [1..nx], j \in [1..nz-1], n \in [1..nt], \end{array} \right. \tag{24}$$

les conditions initiales suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_x|^{0} = 0, \\ E_y|^{1/2} = 0, \\ H_z|^{0} = 0, \end{array} \right. \tag{25}$$

et des conditions aux bords sur E_y pour

$$\left\{ \begin{array}{l} j = 0, i \in [0..nx], \\ j = nz, i \in [0..nx], \\ i = 0, j \in [0..nz], \\ i = nx, j \in [0..nz]. \end{array} \right. \tag{26}$$

On doit aussi discrétiser le milieu, pour cela on définit sur chaque cellule la permittivité électrique et la conductivité électrique :

$\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ la permittivité électrique sur la cellule (i, j) ,
 $\sigma_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ la conductivité électrique sur la cellule (i, j) .

On peut alors remplacer dans chacune des équations du système (21), les quantités correspondant aux dérivées partielles en espace (en se servant de (22)) et en temps (en se servant de (23)) des champs électriques et magnétiques, ainsi que celles relevant de la présence des composantes H_x, E_y, H_z . Le schéma est explicite ce qui facilite l'implémentation des calculs.

$$\begin{aligned}
\mu_0 \frac{H_x|_{(i+\frac{1}{2},j)}^{n+1} - H_x|_{(i+\frac{1}{2},j)}^n}{\Delta t} & - \frac{E_y|_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} - E_y|_{(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z} = 0 \\
\mu_0 \frac{H_z|_{(i,j+\frac{1}{2})}^{n+1} - H_z|_{(i,j+\frac{1}{2})}^n}{\Delta t} & + \frac{E_y|_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} - E_y|_{(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0 \\
\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \frac{E_y|_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} - E_y|_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} & + \sigma_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \frac{E_y|_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} + E_y|_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{n-\frac{1}{2}}}{2} \\
& - \frac{H_x|_{(i+\frac{1}{2},j+1)}^n - H_x|_{(i+\frac{1}{2},j)}^n}{\Delta z} \\
& + \frac{H_z|_{(i+1,j+\frac{1}{2})}^n - H_z|_{(i,j+\frac{1}{2})}^n}{\Delta x} \\
& + j_s|_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^n = 0
\end{aligned} \tag{27}$$

où on a remplacé σE par $\frac{\sigma_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{2} [E_y|_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} + E_y|_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{n-\frac{1}{2}}]$ pour maintenir un système centré.

Du système (27) on peut extraire le système suivant qui nous permet de calculer les valeurs des champs à partir d'une condition initiale :

$$\begin{aligned}
H_x|_{(i+\frac{1}{2},j)}^{n+1} &= H_x|_{(i+\frac{1}{2},j)}^n + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta z} [E_y|_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} - E_y|_{(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}}] \\
H_z|_{(i,j+\frac{1}{2})}^{n+1} &= H_z|_{(i,j+\frac{1}{2})}^n - \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta x} [E_y|_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} - E_y|_{(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}}] \\
E_y|_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1 - \frac{\sigma_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \Delta t}{2\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}}{1 + \frac{\sigma_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \Delta t}{2\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}} E_y|_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{n-\frac{1}{2}} \\
&+ \frac{1}{1 + \frac{\sigma_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \Delta t}{2\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}} \frac{\Delta t}{\Delta z \varepsilon_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} [H_x|_{(i+\frac{1}{2},j+1)}^n - H_x|_{(i+\frac{1}{2},j)}^n] \\
&- \frac{1}{1 + \frac{\sigma_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \Delta t}{2\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}} \frac{\Delta t}{\Delta x \varepsilon_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} [H_z|_{(i+1,j+\frac{1}{2})}^n - H_z|_{(i,j+\frac{1}{2})}^n] \\
&- \frac{1}{1 + \frac{\sigma_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \Delta t}{2\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}} \frac{\Delta t}{\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} j_s|_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^n
\end{aligned} \tag{28}$$

On a donc l'algorithme suivant :

- on connaît $E_y^{\frac{1}{2}}, H_x^0, H_z^0$,
- pour $1 \leq n \leq nt$,
 - on calcule dans l'ordre $H_x^n, H_z^n, E_y^{n+\frac{1}{2}}$ connaissant $E_y^{n-\frac{1}{2}}, H_x^{n-1}, H_z^{n-1}$.

Du point de vue informatique, on déclare en fait trois tableaux (H_x, E_y, H_z) décalés les un par rapport aux autres afin de faciliter l'implémentation des équations (28).

$$H_x(i, j) = H_x|_{(i+\frac{1}{2},j)}^n,$$

$$E_y(i, j) = E_y|_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}},$$

$$H_z(i, j) = H_z|_{(i,j+\frac{1}{2})}^n,$$

et deux tableaux de coefficients

$$\varepsilon(i, j) = \varepsilon_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}},$$

$$\sigma(i, j) = \sigma_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}},$$

et la source

$$j_s(i, j) = j_s|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$$

Informatiquement, (27) se traduit alors par :

$$\begin{aligned}
H_x(i, j) &= H_x(i, j) + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta z} [E_y(i, j+1) - E_y(i, j)] \\
H_z(i, j) &= H_z(i, j) - \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta x} [E_y(i+1, j) - E_y(i, j)] \\
E_y(i, j) &= \frac{1 - \frac{\sigma(i, j) \Delta t}{2\varepsilon(i, j)}}{1 + \frac{\sigma(i, j) \Delta t}{2\varepsilon(i, j)}} E_y(i, j) \\
&+ \frac{1}{1 + \frac{\sigma(i, j) \Delta t}{2\varepsilon(i, j)}} \frac{\Delta t}{\Delta z \varepsilon(i, j)} [H_x(i, j) - H_x(i, j-1)] \\
&- \frac{1}{1 + \frac{\sigma(i, j) \Delta t}{2\varepsilon(i, j)}} \frac{\Delta t}{\Delta x \varepsilon(i, j)} [H_z(i, j) - H_z(i-1, j)] \\
&- \frac{1}{1 + \frac{\sigma(i, j) \Delta t}{2\varepsilon(i, j)}} \frac{\Delta t}{\varepsilon(i, j)} j_s(i, j)
\end{aligned} \tag{29}$$

Il est évident que le modèle ne peut être utilisé pour calculer les dérivées partielles des champs sur les frontières de notre domaine de calcul, le schéma de Yee faisant appel à des points extérieurs au domaine. Pour résoudre ce problème on a tout d'abord imposé une valeur du champ électrique nulle sur tout les bords, et calculé les champs magnétiques et électriques uniquement à l'intérieur du domaine. Mais cela induit des réflexions parasites; on a donc implémenté des conditions absorbantes qui les suppriment. Ces conditions absorbantes sont des conditions d'ordre 4; elles ont été fournies par Mr. Francis Collino (voir [4]) il s'agit de travaux de l'INRIA; et elles sont très efficaces.

Pour modéliser la source nous prenons une fonction qui est la fonction indicatrice en espace et la dérivé d'une Gaussienne en temps. C'est une impulsion courte, de fréquence centrale F_s (dans notre cas cette fréquence peut être égale à 300MHz ou à 500MHz), et de fréquence maximale (de coupure) F_c (on prend $F_c = 2.5F_s$). Sa formule est la suivante :

$$j_s(x, z, t) = \delta_{(x_s, z_s)}(x, z) A \frac{d}{dt} e^{-(\pi F_s(t-t_0))^2}$$

où (x_s, z_s) est la position de la source,

$t_0 = \frac{1.3}{F_s}$ est le temps où la source commence à émettre.

2.2 Stabilité et dispersion du schéma

Rappelons les résultats de stabilité et de dispersion numérique du schéma de Yee (voir le livre de Taflove [2]).

Le schéma de Yee explicite est soumis à une condition de stabilité fixant la taille de l'incrément temporel en fonction des incréments spatiaux.

$$\Delta t \leq \frac{1}{c_{max} \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}}, \quad (30)$$

ce qui donne

$$\Delta t \leq \frac{h}{c_{max} \sqrt{2}}, \quad (31)$$

si $\Delta x = \Delta z = h$, où c_{max} est la vitesse de propagation du milieu d'indice de réfraction le plus faible à l'intérieur du domaine modélisé, Δt l'incrément temporel.

Pour un schéma donné, la dispersion numérique caractérise les écarts de la vitesse de propagation numérique v_n par rapport à la vitesse réelle de la lumière c dans le milieu considéré (notée c_0 dans le vide). Elle dépend de la finesse de la discrétisation spatiale définie par le nombre de pas de discrétisation par longueur d'onde et de la fréquence de coupure. Pour notre cas ($F_c = 2.5F_s$) il faut prendre :

$$h \leq \frac{c_{min}}{2.5F_s N_c} \quad (32)$$

où c_{min} est la vitesse de propagation du milieu d'indice de réfraction le plus élevé à l'intérieur du domaine modélisé, N_c le nombre de point par longueur d'onde.

En pratique on fixe $N_c = 10$, on en déduit h par (32), et Δt par (31).

2.3 Résultats Numériques

Dans cette partie on va présenter quelques unes des simulations numériques effectuées.

On s'intéresse tout d'abord à la modélisation du radar et du milieu. Pour coller à la réalité on choisit de prendre comme terme source une impulsion courte de fréquence centrale égale, soit à 300 MHz, soit à 500MHz comme celle du radar de "GSSI". On choisit aussi de prendre le nombre de points par longueur d'onde égal à 10 (pour une question de rapidité des calculs).

Pour pouvoir faire beaucoup de simulations rapidement et donc tester notre programme, on prend un domaine de calcul petit ($n_x = n_z = 201$), et pas trop de pas de temps ($nt = 501$). De ces données on déduit par la formule (32) la valeur de Δx et Δz (elles valent à peu près 24 mm), puis par la condition nécessaire de stabilité (31) la valeur de Δt (ce qui donne $\Delta t = 5.65 \cdot 10^{-11}$ s). Le domaine fait donc 4,8 mètres de long et de profondeur, on l'étudie sur une durée de 28ns (sachant que la source dure 3ns). Les conditions initiales sont toujours nulles.

Maintenant, on va présenter deux des simulations numériques :

- Tout d'abord on modélise un sous-sol relativement simple, on prend donc un milieu à deux couches : une couche d'air (de conductivité électrique $\sigma_1 = 0$ et de permittivité électrique relative $\varepsilon_1 = 1$) et enfin une couche de terre ($\sigma_2 = 0.001$, $\varepsilon_2 = 8$). Dans la couche de terre on place un tuyau de fer ($\sigma = 10^6$, $\varepsilon = 1$).
- Ensuite on modélise la fosse de sable de l'aire d'essai comme un milieu à deux couches : une couche d'air (de conductivité électrique $\sigma_1 = 0$ et de permittivité électrique relative $\varepsilon_1 = 1$) et une couche de sable sec ($\sigma_2 = 0.00001$, $\varepsilon_2 = 4$). On place dans la couche de sable trois tuyaux, un en acier, un en fonte ($\sigma = 10^6$, $\varepsilon = 1$), et un en polyéthylène ($\sigma = 0$, $\varepsilon = 2.4$).

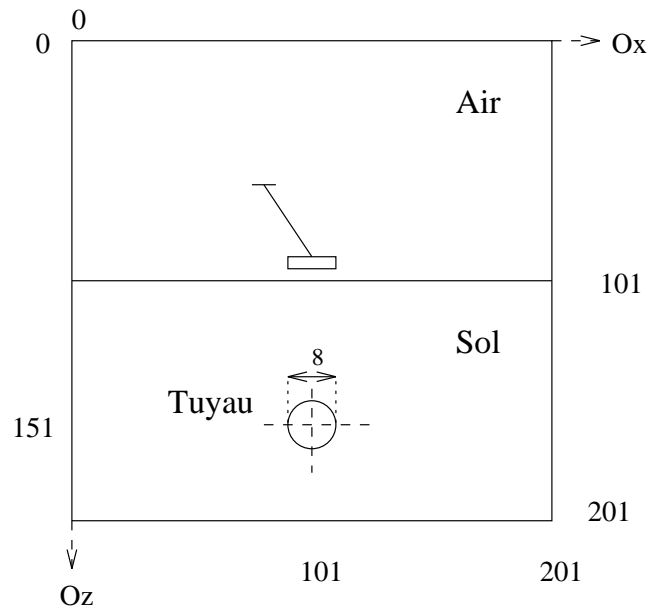


FIG. 4: *Configuration simple, 1 seul tuyau*

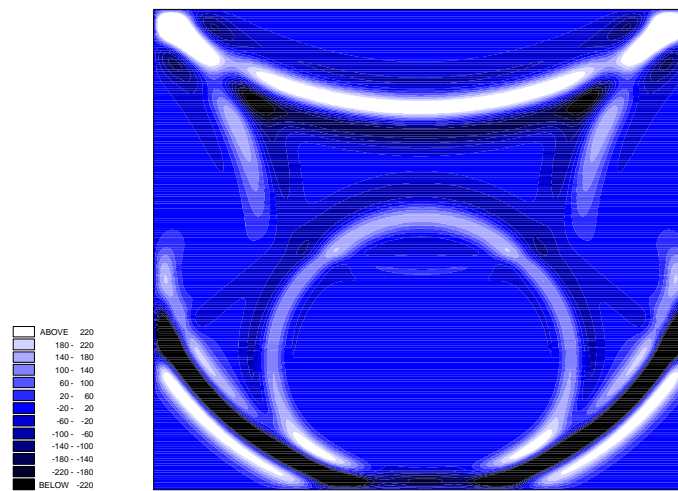


FIG. 5: *Instantané sans conditions absorbantes aux bords*

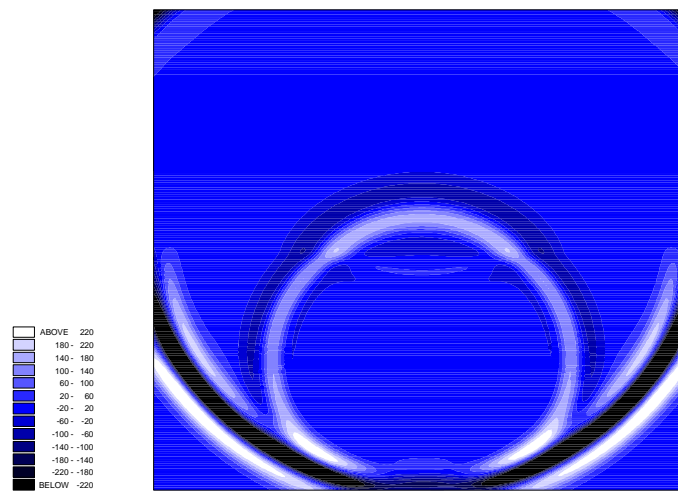


FIG. 6: *Instantané avec conditions absorbantes aux bords*

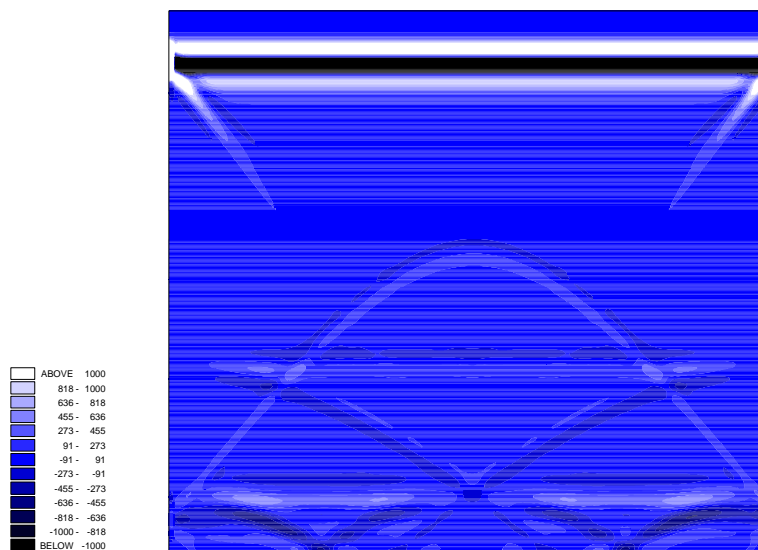


FIG. 7: *Trace sans conditions absorbantes aux bords*

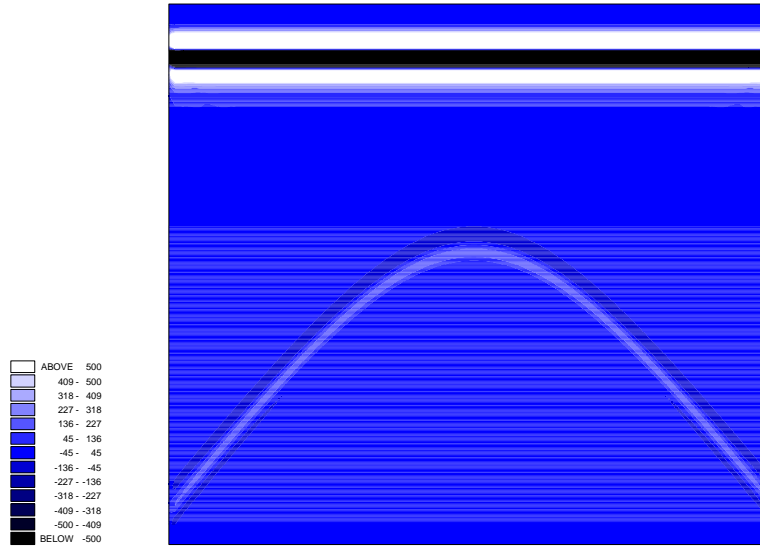


FIG. 8: *Trace avec conditions absorbantes aux bords*

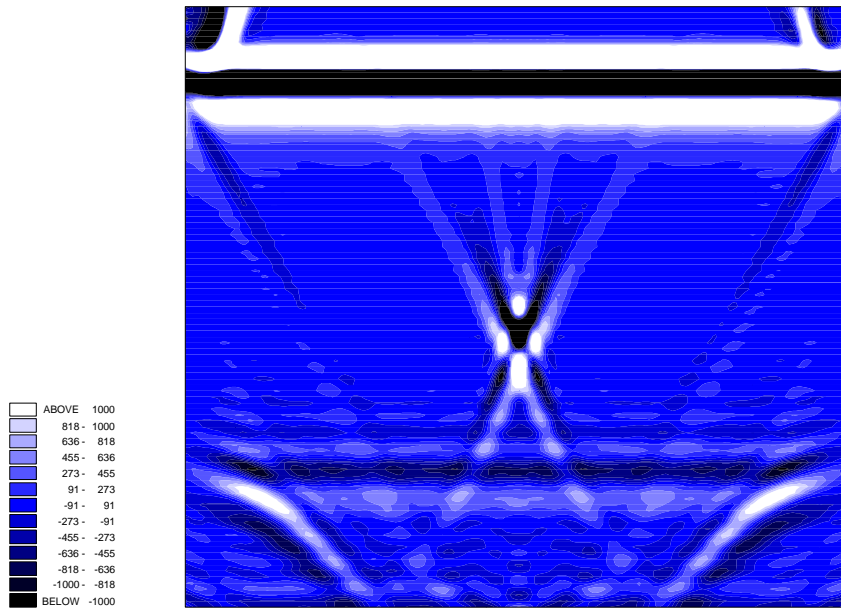
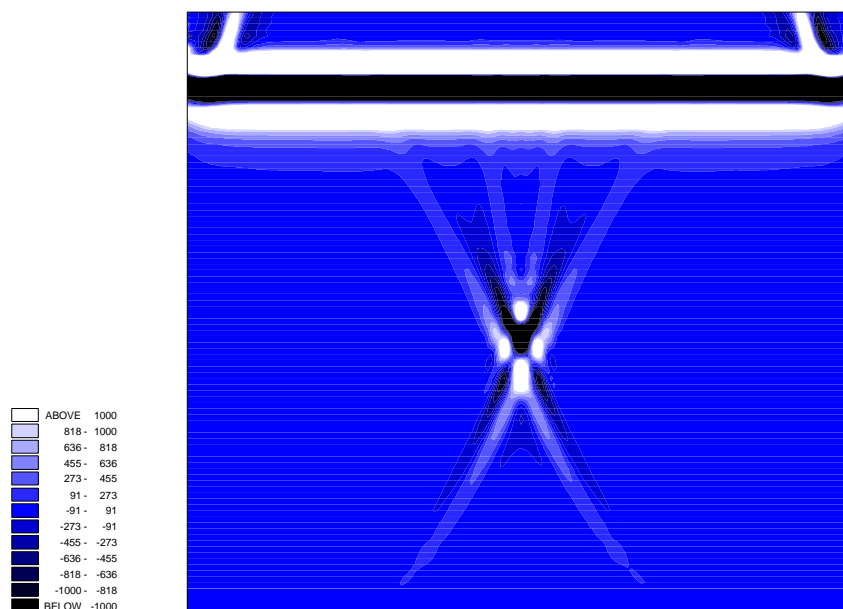
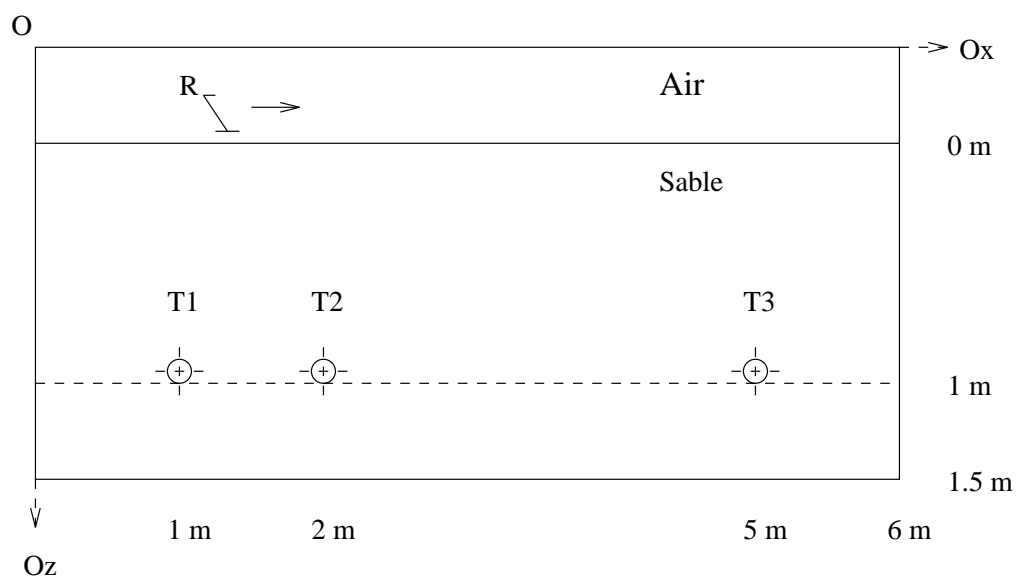


FIG. 9: *Migration sans conditions absorbantes aux bords*

FIG. 10: *Migration avec conditions absorbantes aux bords*

T1 tuyau d'acier de rayon 8 cm

T2 tuyau de fonte de rayon 5 cm

T3 tuyau de PE de rayon 8 cm

FIG. 11: *Configuration à 2 couches, 3 tuyaux*



FIG. 12: *Instantané avec conditions absorbantes aux bords*

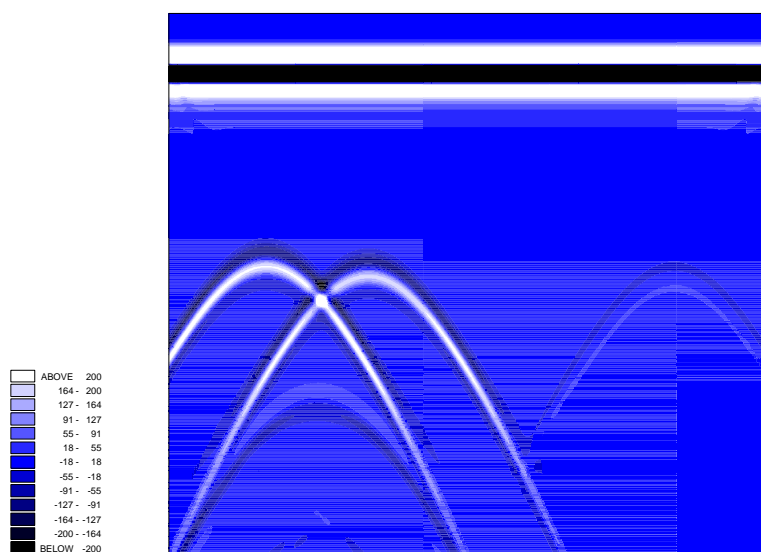


FIG. 13: *Trace avec conditions absorbantes aux bords*

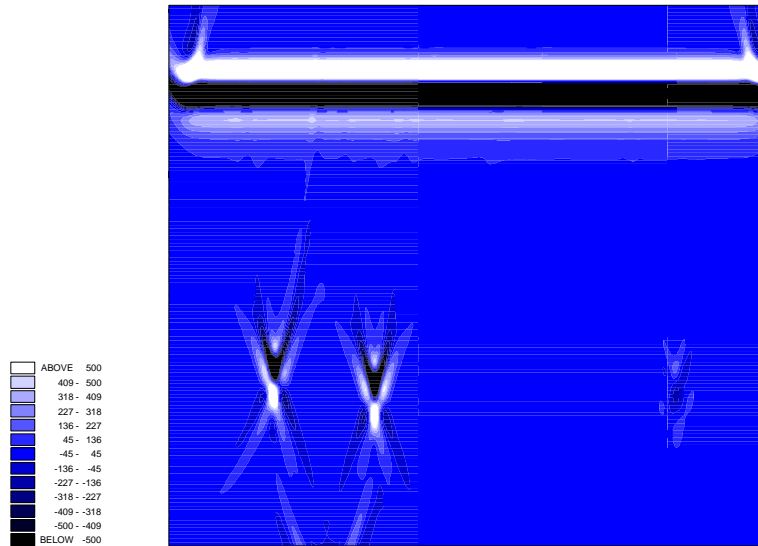


FIG. 14: *Migration avec conditions absorbantes aux bords*

Rappelons que la trace d'un milieu est la juxtaposition des enregistrements temporels reçus en fonction de la position du radar, un instantané est la valeur d'un champ en tous les points à un instant donné.

On peut voir que dans la simulation d'un milieu à 2 couches avec un seul tuyau, la position du tuyau apparaît clairement (sommet des hyperboles dans les figures 7 et 8, ou croix dans les figures 9 et 10). On peut aussi remarquer que les conditions aux bords de Francis Collino sont très efficaces (comparer les figures 5 et 6).

La deuxième simulation donne des résultats analogue aux mesures physiques, elle valide donc le programme. On remarque aussi qu'une migration permet là encore de déterminer la position des tuyaux.

3 Synthèse Bibliographique

Cette section expose et donne un résumé rapide de la diverse documentation étudiée. Tout d'abord j'ai été amené à lire les livres [5] et [6] pour m'initier aux équations de Maxwell. Puis les articles ([7, 8, 9]) fournis par GAZ DE FRANCE, m'ont apporté plus de précisions sur le sujet du stage. A l'aide d'Internet, j'ai recherché des articles sur les radars géologiques ([10, 11, 12, 13, 14]). La bibliothèque de l'INRIA m'a fourni les articles ([15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23]). Et enfin j'ai reçu les articles ([24, 25, 26, 27, 28, 29]) et la thèse [30] de GAZ DE FRANCE.

Les divers articles bien que parlant tous des radars géologiques, peuvent se répartir en plusieurs catégories, ceux qui présentent seulement les diverses applications possibles des radars ([7, 15, 22]), ceux qui résolvent le problème direct (calcul des champs électriques et magnétiques dans un milieu donné) en utilisant une méthode de différences finies soit en domaine temporel ([12, 30]), soit en domaine fréquentiel ([9, 10]), ceux qui résolvent le problème de détection d'objets enterrés en résolvant un problème inverse ([18, 19, 20, 21, 13, 14, 23, 24, 26, 27, 28, 29]), enfin les articles qui cherchent à modéliser les antennes, l'impulsion ou le sol lui-même ([16, 22, 25]).

Le radar géologique ou "Ground Penetrating Radar" (GPR) peut être défini comme étant un radar dont le but est de détecter et identifier les structures et objets présents dans le proche sous-sol. Ses applications sont la prévention des risques souterrains, la préparation des chantiers de génie civil, le contrôle d'ouvrages (ponts, tunnels), la prospection géologique, l'étude des sites pollués (par des contaminants radioactifs, chimiques), l'étude de sites militaires (comme les terrains minés, où les lieux de combats pour retrouver les munitions qui n'ont pas explosé), l'archéologie... L'article le plus détaillé sur le sujet est [22]. Le problème qui nous intéresse se place dans le cadre de la gestion des réseaux urbains (électricité, gaz, télécommunications, eau, assainissement, éclairage, ...), pour lesquels l'usage du radar concerne essentiellement le repérage des réseaux enterrés afin de faciliter la préparation des chantiers de pose de branchements et d'extensions.

Le radar est un boîtier mobile composé d'une antenne qui émet des impulsions brèves vers le bas, et d'une antenne de forme identique qui recueille les échos réfléchis par le terrain, la totalité de ces échos est appelée trace radar. On déplace le radar le long de la surface et les traces recueillies forment une section radar. On dispose donc de données dans le domaine (x, y, t) , et l'on cherche à retrouver les paramètres physiques dans le domaine (x, y, z)

Mathématiquement ce problème entre dans la classe des problèmes dits inverses. Dans ce type de problèmes, on suppose donné un modèle reliant les données observées (ici les enregistrements du champ électrique) aux paramètres physiques (perméabilité électrique et conductivité), et on cherche à retrouver les paramètres produisant des observations données. Contrairement au problème direct (ou simulation: étant donné un jeu de paramètres, prédire les observations) qui est déterminé de manière unique, le problème inverse n'a pas de solution unique, on dit qu'il est mal posé.

Il existe diverses méthodes pour attaquer ce problème. Elles peuvent se différencier par les hypothèses a priori qu'elles font sur les paramètres physiques. Par exemple, certaines supposent que l'on cherche un objet de forme connue (circulaire) dans un milieu homogène ou stratifié. On peut aussi supposer que le milieu est invariant par translation dans une direction, mais sans imposer de forme pour les hétérogénéités, ou encore combiner ces deux hypothèses. Nous n'avons pas trouvé d'article attaquant le problème le plus général: retrouver une distribution «arbitraire» des paramètres physiques à partir des observations. L'expérience acquise par les géophysiciens permet de penser que ce problème est difficile (voir les travaux de M. Chavent [31]).

Nous allons résumer 3 articles [14, 22, 21] que nous considérons comme particulièrement significatifs. Les deux premiers utilisent une technique de reconstruction basée sur un modèle de propagation assez simple (valable en milieu homogène ou stratifié horizontalement). Le troisième pose un problème inverse (linéarisé), mais a essentiellement le même domaine d'application que les deux premiers. Tous trois sont en fait des méthodes d'imagerie (au sens de la migration sismique): ils produisent une «image» du sous-sol où les objets enterrés sont indiqués. En poursuivant l'analogie avec la géophysique, les deux premiers articles [14, 22] réalisent une migration de Kirchhoff (voir [32]), alors que [21] met en œuvre une inversion de Born.

La migration de Kirchhoff repose sur l'idée que (au moins dans un milieu homogène) les traces radar correspondant à des positions voisines de l'antenne s'organisent selon des hyperboles. Dans un milieu homogène (ou formé de plusieurs couches homogènes) les points d'une même hyperbole sont liés au même point en espace. La migration de Kirchhoff réalise (plus ou moins explicitement) une intégrale le long de ces hyperboles pour produire l'image dans le domaine (x, y, z) .

3.1 Méthode “Synthetic aperture imaging”

Nous résumons ici la méthode présentée dans l'article de E.M. Johansson and J. E. Mast [14]. On suppose :

- que l'on cherche un objet enterré dans un milieu homogène,
- que l'on possède N antennes de réception et M antennes d'émission,
- que l'onde reçue par la $n^{\text{ième}}$ antenne et émise par la $m^{\text{ième}}$ est notée $R_{nm}(t)$.

La quantité $\frac{r_{r_n} + r_{t_m}}{v}$ représente le temps mis pour une impulsion électromagnétique pour aller de la $n^{\text{ième}}$ antenne d'émission au point (x, y, z) de l'objet, se réfléchir et aller à la $m^{\text{ième}}$ antenne de réception. Dans un milieu homogène (cas simple), on peut supposer que l'onde reçue en un point est simplement une version décalée en temps de l'onde émise. Une estimation de la distribution de l'objet au point (x, y, z) est simplement la moyenne des ondes reçues évaluée aux temps de parcours pour chaque antenne.

$$o(x, y, z) = \frac{1}{N.M} \sum_{n,m} R_{nm}\left(\frac{r_{r_n} + r_{t_m}}{v}\right) \quad (33)$$

où

- v est la vitesse de propagation dans le milieu,
- $t = \frac{r_{r_n} + r_{t_m}}{v}$ le temps de parcours,
- r_{r_n} est la distance euclidienne du point (x, y, z) à la $n^{\text{ième}}$ antenne placée en (x_n, y_n, z_n) ,
- r_{t_m} est la distance euclidienne du point (x, y, z) à la $m^{\text{ième}}$ antenne placée en (x_m, y_m, z_m)

Pour s'affranchir de l'hypothèse d'un milieu ambiant homogène, l'algorithme est étendu à un milieu homogène par couche. Quand l'onde rencontre une nouvelle couche sa trajectoire et sa vitesse changent, mais sa trajectoire exacte n'est pas connue, on ne connaît que le point de départ et le point d'arrivée de l'onde. Or l'algorithme a besoin de la distance parcourue dans chaque couche. Les auteurs estiment donc les positions des points d'inflexions (en utilisant la loi de Descartes) qui minimisent le temps de parcours.

Un exemple synthétique est présenté, où les auteurs tentent de retrouver des barres métalliques enfouies dans un barreau de béton.

Les limitations de la méthode quand le milieu est multicouche sont claires. En effet, la détermination de l'emplacement des réflecteurs intermédiaires nécessite une procédure d'optimisation pour chaque trajectoire de l'onde, ce qui ralentit beaucoup l'algorithme.

3.2 Méthode de diffraction tomographique

Résumons la méthode de diffraction tomographique multi-fréquences, telle qu'elle est présentée dans l'article de J. E. Mast and E.M. Johansson [13].

On suppose que le milieu est homogène par couche, et que l'objet a un champ réfléchi proche de celui du milieu. Le champ réfléchi est alors égal à :

$$r(x, y; k) = \int [o(x, y, z'; k)u(x, y, z'; k)] * g(x, y, z'; k)dz' \quad (34)$$

où k est le nombre d'onde, o la distribution de l'objet, u le champ incident et g est la fonction de Green. La fonction de Green est la solution de l'équation des ondes avec pour second membre (terme source) un Dirac. Dans un milieu homogène elle est donnée par la formule suivante :

$$g(x, y, z'; k) = \frac{e^{jkr}}{4\pi r} \quad (35)$$

où

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

Toujours en milieu homogène, u est en fait proportionnel à g . En dérivant r par rapport à k on élimine la dépendance de r par rapport à g^2 . On peut donc ensuite utiliser une technique classique de migration dans le domaine de Fourier. On obtient ainsi une estimation de o , c'est-à-dire de la forme de l'objet.

Les auteurs présentent une étude de la limite de résolution de la méthode. Elle est liée à la longueur d'onde utilisée et à la largeur de rayonnement de l'antenne.

La méthode est validée sur le même cas expérimental qu'au paragraphe précédent. Les résultats semblent supérieurs, sans que l'on puisse nécessairement généraliser cette observation.

3.3 Méthode de Born

Ces méthodes utilisent une approximation de Born, elles supposent en fait que l'objet est une petite perturbation du milieu et elles linéarisent. Elles tiennent compte du fait que les données fournissent deux types d'informations : les temps de trajet et leurs amplitudes. Les temps de trajet des ondes donnent généralement des informations sur les composantes basses-fréquences (le milieu ambiant ou «background») des paramètres du milieu, c'est-à-dire sur la partie lentement variable des paramètres. Les amplitudes elles, donnent des informations sur les objets présents dans ce milieu, c'est-à-dire sur les composantes hautes-fréquences des paramètres.

La méthode de Born est en fait une classe de méthode de perturbation. On suppose connu le milieu ambiant, et l'on cherche les objets comme des perturbations au premier ordre de ce milieu. En pratique, il est souvent nécessaire de connaître la fonction de Green du milieu ambiant ce qui présente une limitation sérieuse de ces méthodes.

Nous présentons maintenant l'application de la méthode de Born itérative selon l'article [21] :

Le milieu dans lequel on résout le problème est constitué de deux couches, l'une étant un milieu homogène (de perméabilité magnétique μ_0 , et de permittivité électrique ε_1), l'autre un milieu inhomogène (de paramètres μ_0 , et $\varepsilon_2(r)$) contenant un objet enterré (de paramètres μ_0 , et $\varepsilon(r)$).

Le champ ϕ total vérifie l'équation suivante :

$$\{\nabla^2 + k^2(r)\}\phi(r) = q(r) \quad (36)$$

où q est la fonction source, et k un scalaire qui satisfait :

$$k^2(r) = \begin{cases} \omega^2 \mu_0 \varepsilon_1 & r \in \text{région1} \\ \omega^2 \mu_0 \varepsilon_2(r) & r \in \text{région2} \\ \omega^2 \mu_0 \varepsilon(r) & r \in \text{objet} \end{cases} \quad (37)$$

Le milieu ambiant («background») est le milieu précédent sans l'objet (il est donc hétérogène). On définit :

$$k_b^2(r) = \begin{cases} \omega^2 \mu_0 \varepsilon_1 & r \in \text{région1} \\ \omega^2 \mu_0 \varepsilon_2(r) & r \in \text{région2} \end{cases} \quad (38)$$

L'équation (36) devient :

$$\{\nabla^2 + k_b^2(r)\}\phi(r) = q(r) - O(r)\phi(r) \quad (39)$$

où

$$O(r) = k^2(r) - k_b^2(r)$$

Introduisons la fonction de Green du milieu ambiant $g_b(r, r')$,

$$\{\nabla^2 + k_b^2(r)\}g_b(r, r') = -\delta(r - r') \quad (40)$$

le champ total peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$\phi(r) = - \int [q(r') - O(r')\phi(r')]g_b(r, r')dr' \quad (41)$$

Soit ϕ_{inc} le champ incident donné par :

$$\phi_{inc}(r) = - \int q(r')g_b(r, r')dr' \quad (42)$$

et ϕ_{sca} le champ réfléchi,

$$\phi_{sca}(r) = \int O(r')\phi(r')g_b(r, r')dr' \quad (43)$$

alors le champ total est

$$\phi(r) = \phi_{inc}(r) + \phi_{sca}(r) \quad (44)$$

Le champ réfléchi est une fonction du profil de l'objet, (43) donné par une intégrale non-linéaire du premier ordre en $O(r)$, puisque ϕ est lui-même une fonction de O . L'équation (43) est résolue par une méthode numérique en utilisant une linéarisation (approximation de Born).

La fonction de Green dépend de la fréquence du signal émis, des caractéristiques du sol, de la position des antennes réceptrices. En principe on peut la calculer analytiquement dans les milieux diélectriques, en résolvant l'équation intégrale de Sommerfeld. En pratique les milieux étant parements homogènes la fonction est très difficile à calculer. C'est pourquoi les auteurs la calculent numériquement en utilisant une méthode de différences finies et une transformation de Fourier. La fonction de Green est la réponse du milieu à une impulsion (c'est la solution élémentaire de l'équation des ondes). On va donc la calculer en plaçant une source en chaque antenne de réception et en évaluant les champs électromagnétiques en tous les points du domaine (ce que l'on fait en utilisant la FDTD). Une fois la fonction de Green connue, on calcule son intégrale à l'intérieur de l'objet en supposant que ses variations sont linéaires sur chaque cellule.

L'équation (43) est résolue numériquement en discrétisant le problème. Ceci est fait en divisant le domaine en cellules sur lesquelles O et les champs sont constants. On doit alors résoudre le système matriciel suivant :

$$[A]O = D \quad (45)$$

où O est maintenant le profil de l'objet, D est un vecteur contenant les observations, et $[A]$ une matrice dépendant du champ total et de l'intégrale de la fonction de Green sur les cellules.

Malheureusement comme on l'a déjà dit le problème n'a pas de solution unique. Les auteurs résolvent donc le problème inverse en utilisant la technique de régularisation de Tikhonov. La régularisation remplace le problème mal posé par un bien posé, elle minimise $\|AO - D\|^2$ sous la contrainte $\|LO\| = \text{constante}$, avec L un stabilisateur linéaire. On cherche en fait à résoudre le problème suivant :

$$\min \{ \|AO - D\|^2 + \lambda^2 \|LO\|^2 \} \quad (46)$$

où λ est appelé paramètre de régularisation

4 Problème Inverse

Il s'agit en fait d'estimer les valeurs des paramètres inconnus du problème direct (dans notre cas les valeurs des constantes du milieu), connaissant une observation de la solution de ce problème (ici une observation du champ électrique). Il existe différentes méthodes pour résoudre ce type de problème inverse; elles sont pour la plupart basées sur le fait de minimiser une fonctionnelle J dépendant des paramètres. De ce fait, résoudre notre problème inverse revient à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{(\varepsilon, \sigma)} \left\{ \begin{array}{l} J(\varepsilon, \sigma) = J(\varepsilon, \sigma, \vec{E}, \vec{H}) \\ \text{avec } (\vec{E}, \vec{H}) \text{ solution de (21) pour } (\varepsilon, \sigma) \text{ donnés,} \\ \text{où } (\varepsilon, \sigma) \text{ appartiennent à l'ensemble des paramètres admissibles.} \end{array} \right. \quad (47)$$

Il nous faut donc définir une fonctionnelle (dite fonction coût), cette fonctionnelle doit être une mesure de la distance entre la solution calculée et la solution observée. Dans notre cas nous choisissons une fonction de coût simple, la somme du carré des écarts entre les deux (le facteur $\frac{1}{2}$ est introduit pour des raisons de commodité dans les calculs).

$$J(\varepsilon, \sigma) = \frac{1}{2} \int_0^T |E_{obs}(ox, oz, t) - E_y(ox, oz, t)|^2 dt \quad (48)$$

où

- T est le temps final de réception du signal observé ($\simeq 30ns$),
- (ox, oz) est la position du point d'observation,
- E_{obs} est le champ électrique observé (et obtenu par le radar),
- E_y est le champ électrique calculé.

Il faut maintenant minimiser cette fonctionnelle, ce qui n'est pas un problème simple. En effet, la plupart des méthodes de minimisation nécessitent la valeur de la fonction de coût et son gradient à chaque itération. Et malheureusement le gradient de la fonction coût ne peut pas être calculé directement (la dépendance de J par rapport à (ε, σ) est assez compliquée). Il est donc nécessaire :

- soit d'estimer ce gradient en approchant la dérivée dans chaque direction par une différence finie, ce qui coûte très cher dès que la dimension de l'espace des paramètres est grande (≥ 10), de plus le choix du paramètre de discrétisation h est difficile,
- soit de le calculer en utilisant la méthode de l'état adjoint, méthode qui calcule le gradient de façon exacte (sans utiliser de paramètre de discrétisation), qui est de coût modeste, mais complexe à mettre en oeuvre.

Calculer le gradient par différence finie étant trop coûteux dans notre cas, on va donc utiliser la méthode de l'état adjoint. On se servira tout de même du gradient calculé par différence finie pour vérifier nos calculs.

La méthode de l'état adjoint est en fait une technique de minimisation sous contrainte, on pénalise la fonctionnelle en lui ajoutant l'équation d'état (21) mise sous forme de contrainte.

La nouvelle fonctionnelle est alors appelée Lagrangien. Elle dépend des paramètres du milieu (ε, σ) , des variables d'état (les champs: \vec{E}, \vec{H}), et enfin d'une nouvelle série de variables: les variables adjointes (les champs: \vec{E}^* champ électrique adjoint, \vec{H}^* champ magnétique adjoint).

Pour bien illustrer le phénomène on va tout d'abord calculer l'état adjoint en continu, puis pour pouvoir l'implémenter on fera les calculs en discret. En effet il n'est pas équivalent de discrétiser le problème adjoint continu, et de calculer l'adjoint discret.

4.1 Calcul de l'état adjoint en continu

Rappelons la définition de la fonctionnelle :

$$J(\varepsilon, \sigma) = \frac{1}{2} \int_0^T |E_{obs}(ox, oz, t) - E_y(ox, oz, t)|^2 dt \quad (49)$$

le Lagrangien est alors égal à :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varepsilon, \sigma, \vec{E}, \vec{H}, \vec{E}^*, \vec{H}^*) &= \frac{1}{2} \int_0^T |E_{obs}(ox, oz, t) - E_y(ox, oz, t)|^2 dt \\ &+ \int_0^T \left\langle \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, H_x^* \right\rangle dt \\ &+ \int_0^T \left\langle \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x}, H_z^* \right\rangle dt \\ &+ \int_0^T \left\langle \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y - \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + j_s^{(y)}, E_y^* \right\rangle dt \end{aligned} \quad (50)$$

où \langle, \rangle représente le produit scalaire usuel dans L^2 , $\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} uv$. Pour faciliter les calculs on prend Ω comme étant \mathbf{R}^2 , on supprime ainsi les problèmes de bord.

On part de la remarque simple mais fondamentale suivante : si E_y, H_x, H_z vérifient l'équation d'état (21) pour les paramètres (ε, σ) alors

$$J(\varepsilon, \sigma) = \mathcal{L}(\varepsilon, \sigma, E_y, H_x, H_z, E_y^*, H_x^*, H_z^*) \quad \forall E_y^*, H_x^*, H_z^*. \quad (51)$$

Le calcul des différentielles partielles par rapport à (ε, σ) se calcule comme une dérivée composée:

$$\forall E_y^*, H_x^*, H_z^* \begin{cases} \frac{\partial J}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_y} \frac{\partial E_y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H_x} \frac{\partial H_x}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H_z} \frac{\partial H_z}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{\partial J}{\partial \sigma} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_y} \frac{\partial E_y}{\partial \sigma} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H_x} \frac{\partial H_x}{\partial \sigma} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H_z} \frac{\partial H_z}{\partial \sigma}. \end{cases} \quad (52)$$

On choisit alors l'état adjoint comme étant le triplet (E_y^*, H_x^*, H_z^*) pour lequel on a :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_y} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H_x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H_z} = 0, \quad (53)$$

(53) est l'équation adjointe (abstraite).

On a alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{\partial J}{\partial \sigma} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma}.\end{aligned}\tag{54}$$

ce qui donne le gradient.

Explicitons l'équation adjointe (53). Pour cela, réécrivons le Lagrangien en effectuant une intégration par partie en espace et en temps :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\varepsilon, \sigma, \vec{E}, \vec{H}, \vec{E}^*, \vec{H}^*) &= \frac{1}{2} \int_0^T |E_{obs}(ox, oz, t) - E_y(ox, oz, t)|^2 dt \\ &+ \langle \mu H_x(T), H_x^*(T) \rangle - \int_0^T \langle H_x, \mu \frac{\partial H_x^*}{\partial t} \rangle dt \\ &+ \int_0^T \langle E_y, \frac{\partial H_x^*}{\partial z} \rangle dt \\ &+ \langle \mu H_z(T), H_z^*(T) \rangle - \int_0^T \langle H_z, \mu \frac{\partial H_z^*}{\partial t} \rangle dt \\ &- \int_0^T \langle E_y, \frac{\partial H_z^*}{\partial x} \rangle dt \\ &+ \langle \varepsilon E_y(T), E_y^*(T) \rangle - \int_0^T \langle E_y, \varepsilon \frac{\partial E_y^*}{\partial t} \rangle dt \\ &+ \int_0^T \langle \sigma E_y + j_s^{(y)}, E_y^* \rangle dt \\ &+ \int_0^T [\langle H_x, \frac{\partial E_y^*}{\partial z} \rangle - \langle H_z, \frac{\partial E_y^*}{\partial x} \rangle] dt\end{aligned}\tag{55}$$

A condition de prendre les conditions initiales :

$$\begin{cases} H_x(t=0) = 0 \\ E_y(t=0) = 0 \\ H_z(t=0) = 0 \end{cases}\tag{56}$$

et les conditions aux limites :

$$\begin{cases} H_x|_{\partial\Omega} = 0 \\ E_y|_{\partial\Omega} = 0 \\ H_z|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}\tag{57}$$

on lit directement sur cette équation la formulation variationnelle de l'équation adjointe. Par exemple, en prenant $H_x = H_z = 0$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_y} = 0$ donne l'équation suivante en E_y^* .

$$\varepsilon \frac{\partial E_y^*}{\partial t} - \sigma E_y^* - \left(\frac{\partial H_x^*}{\partial z} - \frac{\partial H_z^*}{\partial x} \right) - f = 0\tag{58}$$

où $f(x, z, t) = (E_y(x, z, t) - E_{obs}(x, z, t))\delta(x - ox, z - oz)$ et la condition finale :

$$E_y^*(T) = 0 \quad (59)$$

On résout de même les deux autres équations et on obtient le système adjoint suivant :

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial H_x^*}{\partial t} - \frac{\partial E_y^*}{\partial z} = 0 \\ \mu \frac{\partial H_z^*}{\partial t} + \frac{\partial E_y^*}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon \frac{\partial E_y^*}{\partial t} - \sigma E_y^* - \left(\frac{\partial H_x^*}{\partial z} - \frac{\partial H_z^*}{\partial x} \right) - f = 0 \end{cases} \quad (60)$$

avec les conditions finales :

$$\begin{cases} H_x^*(T) = 0 \\ E_y^*(T) = 0 \\ H_z^*(T) = 0 \end{cases} \quad (61)$$

Le fait que l'on ait les conditions finales (61) rend le système rétrograde en temps (60) stable. Il est bien connu que le système (60) direct n'est pas stable (à cause du signe négatif de σ) (on peut faire une analogie avec l'équation de la chaleur).

D'après (54), les gradients partiels de J sont donc tels que, pour tout $\delta\varepsilon, \delta\sigma$, on ait :

$$\begin{cases} \langle \nabla_\varepsilon J, \delta\varepsilon \rangle = \int_0^T \langle \frac{\partial E_y}{\partial t}, E_y^* \delta\varepsilon \rangle dt \\ \langle \nabla_\sigma J, \delta\sigma \rangle = \int_0^T \langle E_y, E_y^* \delta\sigma \rangle dt \end{cases} \quad (62)$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \nabla_\varepsilon J = \int_0^T \frac{\partial E_y}{\partial t} E_y^* dt \\ \nabla_\sigma J = \int_0^T E_y E_y^* dt \end{cases} \quad (63)$$

4.2 Calcul de l'état adjoint discret

Maintenant en se servant de nos calculs en continu comme guide, effectuons les calculs en discret. Tout d'abord contrairement à la partie 2, on introduit un peu de formalisme (cela simplifiera les calculs).

Introduisons les espaces dans lesquels on travaille :

- $\mathcal{L}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^2 = \{ \text{suites de fonctions } (u_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}})_{i,j} \in l^2 \}$, il permet de définir le champ électrique E_y ,
- $\mathcal{L}_{0, \frac{1}{2}}^2 = \{ \text{suites de fonctions } (u_{i, j+\frac{1}{2}})_{i,j} \in l^2 \}$ qui définit le champ magnétique H_z ,
- $\mathcal{L}_{\frac{1}{2}, 0}^2 = \{ \text{suites de fonctions } (u_{i+\frac{1}{2}, j})_{i,j} \in l^2 \}$ qui définit le champ magnétique H_x .

On munit ces espaces des produits scalaires suivants :

$$\begin{aligned}
 \langle u, v \rangle_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} &= \Delta x \Delta z \sum_{i,j} u_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \cdot v_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}, \\
 \langle u, v \rangle_{0, \frac{1}{2}} &= \Delta x \Delta z \sum_{i,j} u_{i, j+\frac{1}{2}} \cdot v_{i, j+\frac{1}{2}}, \\
 \langle u, v \rangle_{\frac{1}{2}, 0} &= \Delta x \Delta z \sum_{i,j} u_{i+\frac{1}{2}, j} \cdot v_{i+\frac{1}{2}, j}.
 \end{aligned} \tag{64}$$

On définit ensuite les opérateurs de dérivations $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial z}$ en discret :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_x : \mathcal{L}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^2 \longrightarrow \mathcal{L}_{0, \frac{1}{2}}^2 \\ D_x(u) = \frac{u_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \\ \\ D_z : \mathcal{L}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^2 \longrightarrow \mathcal{L}_{\frac{1}{2}, 0}^2 \\ D_z(u) = \frac{u_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}}{\Delta z}, \end{array} \right. \tag{65}$$

et leurs (opérateurs) adjoints (calculés par intégration par partie discrète) :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_x^* : \mathcal{L}_{0, \frac{1}{2}}^2 \longrightarrow \mathcal{L}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^2 \\ D_x^*(u) = -\frac{u_{i+1, j+\frac{1}{2}} - u_{i, j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \\ \\ D_z^* : \mathcal{L}_{\frac{1}{2}, 0}^2 \longrightarrow \mathcal{L}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^2 \\ D_z^*(u) = -\frac{u_{i+\frac{1}{2}, j+1} - u_{i+\frac{1}{2}, j}}{\Delta z}. \end{array} \right. \tag{66}$$

Ces opérateurs vont permettre de simplifier les notations dans le schéma de Yee (voir le système (27)). On ne les a pas utilisés dans la partie 2.1 car cela rend le système (27) plus facile à programmer, par contre on les utilise maintenant pour avoir des expressions proches des expressions continues, et ne prenant pas beaucoup de place.

On peut à présent introduire la fonctionnelle discrète :

$$J(\varepsilon, \sigma) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{nt} [E_y|_{(ox+\frac{1}{2}, oz+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} - E_{obs}|_{(ox+\frac{1}{2}, oz+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}}]^2 \Delta t, \quad (67)$$

et le Lagrangien discret (somme de la fonctionnelle discrète et d'une contrainte dépendant de l'équation d'état discrète) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varepsilon, \sigma, E_y, H_x, H_z, E_y^*, H_x^*, H_z^*) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{nt} [E_y|_{(ox+\frac{1}{2}, oz+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} - E_{obs}|_{(ox+\frac{1}{2}, oz+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}}]^2 \Delta t \\ &+ \Delta t \sum_{n=0}^{nt-1} < \mu_0 \frac{H_x|^{n+1} - H_x|^{n+1}}{\Delta t} - D_z(E_y|^{n+\frac{1}{2}}), H_x^*|^{n+\frac{1}{2}} >_{\frac{1}{2}, 0} \\ &+ \Delta t \sum_{n=0}^{nt-1} < \mu_0 \frac{H_z|^{n+1} - H_z|^{n+1}}{\Delta t} + D_x(E_y|^{n+\frac{1}{2}}), H_z^*|^{n+\frac{1}{2}} >_{0, \frac{1}{2}} \\ &+ \Delta t \sum_{n=1}^{nt} < \varepsilon \frac{E_y|^{n+\frac{1}{2}} - E_y|^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \sigma \frac{E_y|^{n+\frac{1}{2}} + E_y|^{n-\frac{1}{2}}}{2}, E_y^*|^n >_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \\ &+ \Delta t \sum_{n=1}^{nt} < D_z^*(H_x|^n) - D_x^*(H_z|^n) + j_s|^n, E_y^*|^n >_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (68)$$

En faisant exactement les mêmes calculs que dans le cas continu, mais en utilisant des intégrations par partie discrète, on réécrit le Lagrangien discret :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\varepsilon, \sigma, E_y, H_x, H_z, E_y^*, H_x^*, H_z^*) = & \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{nt} [E_y|_{(ox+\frac{1}{2}, oz+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} - E_{obs}|_{(ox+\frac{1}{2}, oz+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}}]^2 \Delta t \\
& + \langle \mu_0 H_x|^{nt}, H_x^*|^{nt-\frac{1}{2}} \rangle_{\frac{1}{2}, 0} - \Delta t \sum_{n=1}^{nt-1} \langle H_x|^{n+\frac{1}{2}}, \mu_0 \frac{H_x^*|^{n+\frac{1}{2}} - H_x^*|^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \rangle_{\frac{1}{2}, 0} \\
& - \Delta t \sum_{n=1}^{nt-1} \langle E_y|^{n+\frac{1}{2}}, D_z^*(H_x^*|^{n+\frac{1}{2}}) \rangle_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \\
& + \langle \mu_0 H_z|^{nt}, H_z^*|^{nt-\frac{1}{2}} \rangle_{0, \frac{1}{2}} - \Delta t \sum_{n=1}^{nt-1} \langle H_z|^{n+\frac{1}{2}}, \mu_0 \frac{H_z^*|^{n+\frac{1}{2}} - H_z^*|^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \rangle_{0, \frac{1}{2}} \\
& + \Delta t \sum_{n=1}^{nt-1} \langle E_y|^{n+\frac{1}{2}}, D_x^*(H_z^*|^{n+\frac{1}{2}}) \rangle_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \tag{69} \\
& + \langle \varepsilon E_y|^{nt+\frac{1}{2}}, E_y^*|^{nt} \rangle_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} - \Delta t \sum_{n=1}^{nt-1} \langle E_y|^{n+\frac{1}{2}}, \varepsilon \frac{E_y^*|^{n+1} - E_y^*|^{n+1}}{\Delta t} \rangle_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \\
& + \langle \frac{\sigma \Delta t}{2} E_y|^{nt+\frac{1}{2}}, E_y^*|^{nt} \rangle_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + \Delta t \sum_{n=1}^{nt-1} \langle E_y|^{n+\frac{1}{2}}, \sigma \frac{E_y^*|^{n+1} + E_y^*|^{n+1}}{2} \rangle_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \\
& + \Delta t \sum_{n=1}^{nt} \langle H_x|^{n+\frac{1}{2}}, D_z(E_y^*|^{n+\frac{1}{2}}) \rangle_{\frac{1}{2}, 0} - \Delta t \sum_{n=1}^{nt} \langle H_z|^{n+\frac{1}{2}}, D_x(E_y^*|^{n+\frac{1}{2}}) \rangle_{0, \frac{1}{2}} \\
& + \Delta t \sum_{n=1}^{nt} \langle j_s|^{n+\frac{1}{2}}, E_y^*|^{n+\frac{1}{2}} \rangle_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

A condition de prendre les conditions initiales :

$$\begin{cases} H_x|^{n=0} = 0, \\ E_y|^{n=\frac{1}{2}} = 0, \\ H_z|^{n=0} = 0, \end{cases} \tag{70}$$

et les conditions aux limites :

$$E_y|_{\partial\Omega} = 0, \tag{71}$$

on obtient le système adjoint discret suivant :

$$\begin{aligned}
\mu_0 \frac{H_x^*|_{(i+\frac{1}{2},j)}^{n+\frac{1}{2}} - H_x^*|_{(i+\frac{1}{2},j)}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} & - \frac{E_y^*|_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^n - E_y^*|_{(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2})}^n}{\Delta z} = 0 \\
\mu_0 \frac{H_z^*|_{(i,j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} - H_z^*|_{(i,j+\frac{1}{2})}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} & + \frac{E_y^*|_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^n - E_y^*|_{(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^n}{\Delta x} = 0 \\
\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \frac{E_y^*|_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{n+1} - E_y^*|_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^n}{\Delta t} & - \sigma_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \frac{E_y^*|_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{n+1} + E_y^*|_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^n}{2} \\
& - \frac{H_x^*|_{(i+\frac{1}{2},j+1)}^{n+\frac{1}{2}} - H_x^*|_{(i+\frac{1}{2},j)}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z} \\
& + \frac{H_z^*|_{(i+1,j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} - H_z^*|_{(i,j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \\
& - F^{n+\frac{1}{2}} = 0
\end{aligned} \tag{72}$$

où $F_{(i,j)}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x \Delta z} [E_y|_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} - E_{obs}|_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}}] \delta_{(i-ox,j-oz)}$ peut être considéré comme une source.

On a les conditions finales suivante :

$$\begin{cases} H_x^*|^{nt-\frac{1}{2}} = -\frac{\Delta t}{\mu_0} D_z(E_y^*|^{nt}), \\ E_y^*|_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{nt} = -\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \frac{\sigma_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \Delta t}{2}} F_{(i,j)}^{nt+\frac{1}{2}}, \\ H_z^*|^{nt-\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t}{\mu_0} D_x(E_y^*|^{nt}). \end{cases} \tag{73}$$

Si l'on prolonge les champs comme suit

$$\begin{cases} H_x^*|^{nt+\frac{1}{2}} = 0, \\ E_y^*|^{nt+1} = 0, \\ H_z^*|^{nt+\frac{1}{2}} = 0, \end{cases} \tag{74}$$

on peut alors utiliser le système (72) un pas de temps plus loin (cela facilite l'implémentation et permet d'avoir les même conditions finales en discret qu'en continue).

On va tout d'abord supposer que les conditions aux bords sur les champs adjoints sont des conditions de Dirichlet (ici $E_y^*|_{\partial\Omega} = 0$). Ensuite on supposera qu'elles sont absorbantes.

Le fait que l'on ait les conditions finales (73) fait que le système (54) est rétrograde en temps (on part du temps final nt et on arrive au temps initial 0). De plus pour calculer les

gradients partiels on doit connaître les valeurs des champs E_y, H_x, H_z à tout les instants. On a donc le choix soit de stocker les champs E_y, H_x, H_z en mémoire, soit de les recalculer. Pour les recalculer on pourrait penser gagner du temps en résolvant le système de façon rétrograde, malheureusement le système (21) rétrograde n'est stable que si le milieu est non conducteur. On présentera dans la partie suivante divers algorithmes qui résolvent ce problème.

Une fois E_y^*, H_x^*, H_z^* et E_y, H_x, H_z connus on peut calculer les gradients partiels. On a alors les "gradients partiels" $\nabla_\varepsilon J = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon}$ au point de coordonnée $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$:

$$\nabla_\varepsilon J_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})} = \sum_{n=1}^{nt} [E_y|_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} - E_y|_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^{n-\frac{1}{2}}] E_y^*|_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^n, \quad (75)$$

et $\nabla_\sigma J = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma}$ au point de coordonnée $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$:

$$\nabla_\sigma J_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})} = \Delta t \sum_{n=1}^{nt} \frac{E_y|_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} + E_y|_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^{n-\frac{1}{2}}}{2} E_y^*|_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^n. \quad (76)$$

4.3 Algorithmes de calcul de l'état adjoint

Dans cette partie on va présenter les divers algorithmes possible pour calculer l'état adjoint et les gradient partiels, et principalement l'algorithme de Griewank.

Comme on l'a déjà dit on ne peut pas calculer les champs de façon rétrograde sauf dans le cas d'une conductivité nulle $\sigma = 0$, où le système (21) est réversible donc rétrograde. Dans ce cas l'algorithme est le suivant :

- on connaît $E_y|^{nt+\frac{1}{2}}, H_x^*|^{nt+\frac{1}{2}}, H_z^*|^{nt+\frac{1}{2}}, H_x|^{nt}, H_z|^{nt}, E_y^*|^{nt}$
- pour $nt \geq n \geq 1$
 - on calcule dans l'ordre $E_y|^{n-\frac{1}{2}}, H_x|^{n-1}, H_z|^{n-1}$ connaissant $E_y|^{n+\frac{1}{2}}, H_x|^{n-1}, H_z|^{n-1}$,
 - et $E_y^*|^{n-1}, H_x^*|^{n-\frac{1}{2}}, H_z^*|^{n-\frac{1}{2}}$ connaissant $E_y^*|^{n-1}, H_x^*|^{n+\frac{1}{2}}, H_z^*|^{n+\frac{1}{2}}$.

Dans le cas où le milieu est conducteur la première solution est alors de sauvegarder les champs direct à tous les pas de temps et donc de calculer le gradient en une fois (la complexité est de l'ordre de $o(nt)$). Malheureusement cela revient très cher en place mémoire $\mathbf{d} = nt$ où (\mathbf{d} est le nombre de champs à sauvegarder). La deuxième solution (voir la figure 15), ne demandant pas de place mémoire ($\mathbf{d} = 0$), consiste à recalculer les champs à chaque fois (nombre de répétition de calcul $\mathbf{t} = nt$), ce qui cette fois ci est cher en temps de calcul (la complexité $t_c = o(\frac{nt^2}{2})$). Une solution intermédiaire (voir la figure 16) consisterait à sauvegarder les champs à intervalle régulier, ce qui prendrait moins de taille mémoire, mais nécessiterait tout de même beaucoup de temps de calcul $t_c = o(\frac{nt^2}{2d})$. On peut remarquer qu'une fois utilisée la mémoire allouée ne sert plus.

L'algorithme que on va présenter maintenant permet de calculer les champs adjoints et les gradients, en optimisant le temps de calcul en fonction de la place mémoire. Cet algorithme dû à A. Griewank a été amélioré par J. O. Blanch et W. W. Symes (voir [33] et [34]).

La solution de Griewank consiste à utiliser au mieux la place mémoire. Au lieu d'avoir des sauvegardes à temps fixés qui une fois utilisées occupent de la place mémoire pour rien, on se sert d'une pile qui permet de réutiliser la mémoire en empilant des sauvegardes intermédiaires

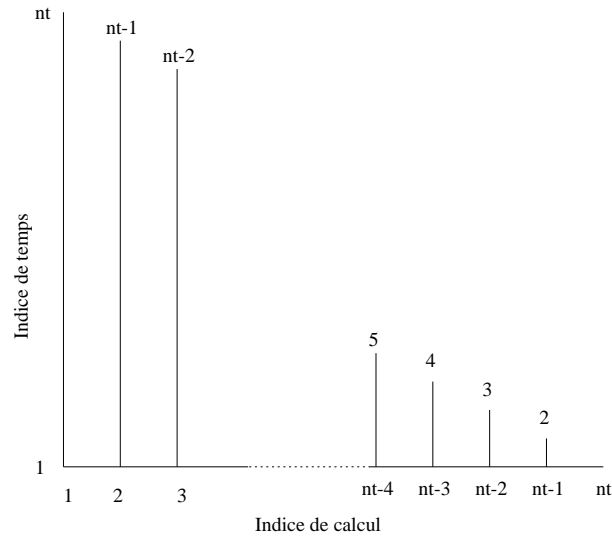


FIG. 15: *Calcul de l'adjoint sans sauvegarde $d = 0$, alors la complexité $t_c = o(\frac{nt^2}{2})$.*

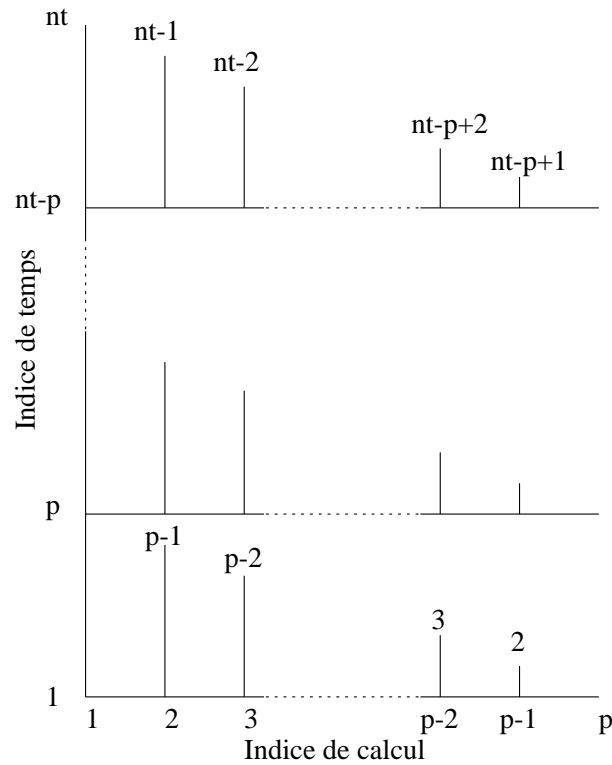


FIG. 16: *Calcul de l'adjoint avec des sauvegardes à temps fixé. La complexité $t_c = o(\frac{nt^2}{2d})$.*

que l'on dépile une fois utilisées. En fait c'est un algorithme récursif (voir figure 17).

Nommons \mathbf{s} l'ensemble des champs directs, \mathbf{F} l'opérateur (discrétisé) qui calcule \mathbf{s} un pas de temps plus loin, $\bar{\mathbf{s}}$ est l'ensemble des champs adjoints et des gradients et $\bar{\mathbf{F}}$ l'opérateur adjoint (discrétisé) et l'opérateur de calcul de gradient.

La procédure récursive s'appelle **treeverse**, elle utilise les 3 fonctions suivante :

sauvegarder(\mathbf{s}) qui met dans la pile le champ \mathbf{s} ,

charger qui dépile le champ \mathbf{s} ,

et **mid** qui détermine à quel indice de temps on doit sauver les champs.

Les variables de **treeverse** sont : le nombre de sauvegardes restantes δ , le nombre de répétition de calculs restants τ , l'indice de temps β que l'algorithme a atteint au moment de l'appel, l'indice de temps σ que ce "fils" (nom des appels récursifs) doit atteindre, l'indice de temps où le prochain calcul d'adjoint doit avoir lieu Φ et l'indice de temps final Φ_d .

```

treeverse( $\delta, \tau, \beta, \sigma, \Phi, \Phi_d$ )
  si  $\sigma > \beta$  alors
     $\delta = \delta - 1$ ;   on décrémente le nombre de sauvegarde
    sauvegarder( $\mathbf{s}$ );   on empile
    pour  $j = \beta$  à  $\sigma - 1$  faire  $\mathbf{s} \leftarrow F_j(\mathbf{s})$ ;   on simule
  fin de si
  tant que  $\kappa = \mathbf{mid}(\delta, \tau, \sigma, \Phi) < \Phi$  faire
    si  $\kappa < \Phi_d$  alors treeverse( $\delta, \tau, \beta, \sigma, \Phi, \Phi_d$ );   appel récursif
     $\tau = \tau - 1$ ;   on décrémente le nombre de calculs
     $\Phi = \kappa$ ;
  fin de tant que
  si  $\Phi - \sigma > 1$  alors sortie ("échec de treeverse")
   $\mathbf{s} \leftarrow \hat{F}_\sigma(\mathbf{s})$ ;   on simule une fois
   $\bar{\mathbf{s}} \leftarrow \bar{F}_\sigma(\bar{\mathbf{s}})$ ;   on calcule l'adjoint et les gradients
  si  $\sigma > \beta$  alors charger;   on dépile
fin de treeverse

```

Le premier appel à **treeverse** est le suivant : **treeverse**($\mathbf{d}, \mathbf{t}, 0, 0, \mu_r, \mathbf{nt}$), où μ_r est le pas de temps maximum que l'on peut atteindre avec \mathbf{d} et \mathbf{t} ; il est calculé par la formule suivante (explicitée dans l'article [33]) :

$$\mu_r(d, t) = \frac{(d + t)!}{t!d!} \quad (77)$$

Un exemple d'application de l'algorithme est décrit sur les figures 17 et 18 :

Le schéma commence tout d'abord par sauver les champs initiaux (indice de temps $i_t = 1$, indice de calcul $i_c = 1$). Il voit (en utilisant la fonction **mid**) que la prochaine sauvegarde se fera au pas de temps $t_l = 57$, il calcule donc les champs jusque là et les sauvegarde (flèche 1). Il voit que la prochaine sauvegarde se fera au pas de temps $t_l = 78$, ce qui est plus que le pas de temps final $t_d = 69$. Il incrémente donc i_c (flèche 2) t_l est alors égal à 72 ce qui est toujours trop grand d'où $i_c = 3$ (flèche 3) alors $t_l = 67$. Il sauve les champs au temps 57 et les calcule

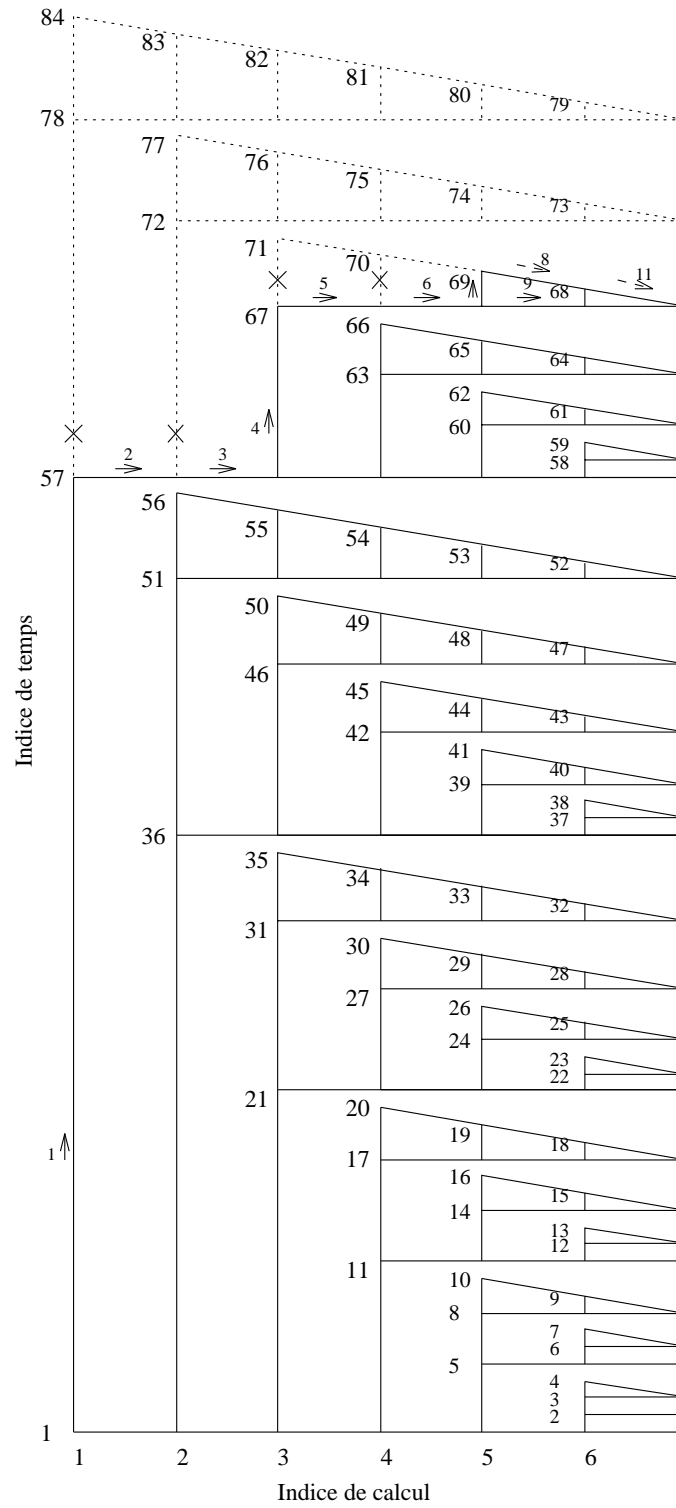
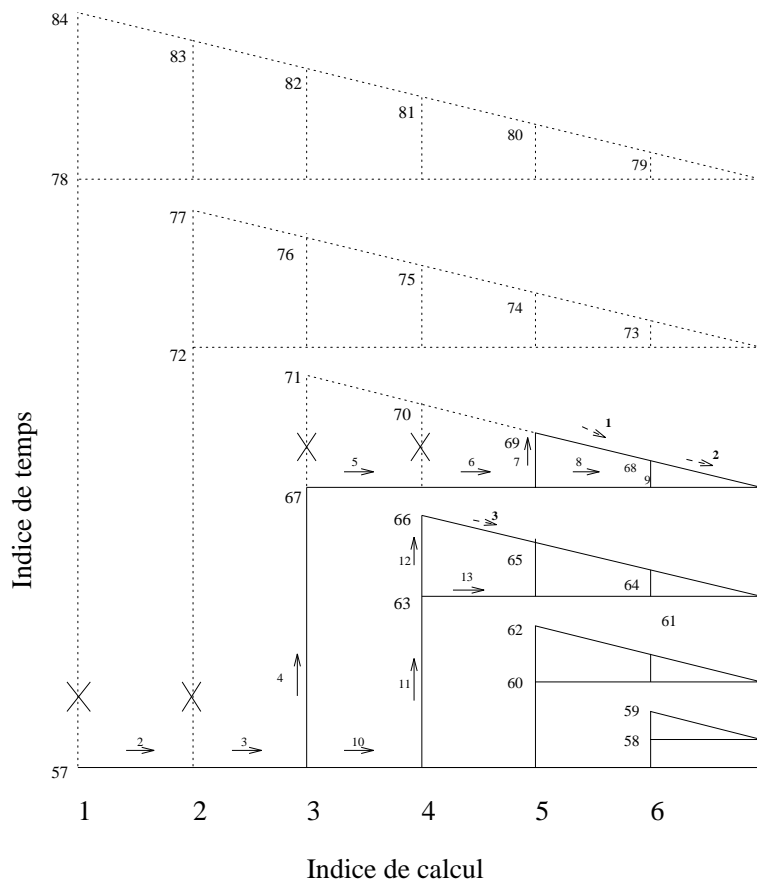


FIG. 17: Schéma de récursivité pour un temps final de 69 avec trois sauvegarde en mémoire ($d=3$), et six calcul ($t=6$). Les lignes en pointillé ne sont pas parcourues par l'algorithme. La complexité est alors $t_c < to(nt)$. Les flèches normales représentent une séquence directe de l'algorithme, celle en tirets le calcul de l'adjoint et du gradient.

FIG. 18: *Zoom du schéma de récursivité.*

pour arriver au pas de temps 67 (flèche 4). Là il évite de calculer les pas de temps 71 et 70 (flèches 5 et 6) et calcule les champs jusqu'à 69 (flèche 7), il calcule alors l'adjoint et le gradient pour le temps final (flèche en tirets 1). Ensuite il récupère le champs au pas de temps 67 (il le dépile), incrémente i_c (flèche 8), calcule les champs en 68 (flèche 9) et calcule l'adjoint (flèche en tirets 2), puis le calcule à nouveau en 67. Maintenant il récupère les champs en 57, incrémente i_c (flèche 10), calcule les champs jusqu'en 63 (flèche 11), sauvegarde, calcule jusqu'en 66 (flèche 12), et calcule l'adjoint (flèche en tirets 3).

Présentons aussi l'algorithme de **mid** qui calcule la position de la prochaine sauvegarde :

```

mid( $\delta, \tau, \sigma, \Phi$ )
  si ( $\Phi = \sigma + 1$ ) ou ( $\delta\tau = 0$ ) alors
     $mid = \Phi$ 
  sinon
     $mid = \frac{\delta\sigma + \tau\Phi}{\delta + \tau}$ 
  fin de mid

```

4.4 Résultats Numériques

Comme dans la section 2.3, dans cette partie on va présenter quelques unes des simulations numériques effectuées. Les données de simulation restent inchangées à l'exception de la taille du modèle: le calcul de l'état adjoint et du gradient étant plus coûteux en temps, on prend un domaine de calcul plus petit ($nx = nz = 101$), et peu de pas de temps ($nt = 301$). De plus on déclare une place mémoire raisonnable $d = 7$, et on calcule le nombre de répétition de calcul $t = 4$ en résolvant l'équation (77), pour initialiser les variables utilisées par l'algorithme «treeverse».

Pour étudier la sensibilité de la fonctionnelle $J(\varepsilon, \sigma)$, on a effectué plusieurs simulation. Présentons-en une. Rappelons l'équation de la fonctionnelle :

$$J(\varepsilon, \sigma) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{nt} [E_y|_{(ox+\frac{1}{2}, oz+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} - E_{obs}|_{(ox+\frac{1}{2}, oz+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}}]^2 \Delta t \quad (78)$$

où

- T est le temps final de réception du signal observé ($\simeq 30ns$) ($T = nt\Delta t$),
- (ox, oz) est la position du point d'observation,
- E_{obs} est le champ électrique observé (et obtenu par le radar),
- E_y est le champ électrique calculé.

Pour représenter facilement les variations de J , et vérifier le gradient, on se ramène à une fonction d'une variable t , en introduisant la fonction j :

$$j(t) = J(\varepsilon_0 + th_\varepsilon, \sigma_0 + th_\sigma) \quad (79)$$

où

- t est une variable scalaire ($t \in [0, 1]$, on se déplace sur un segment de l'espace des paramètres),

- $(\varepsilon_0, \sigma_0)$ sont les paramètres du milieu initial où l'on a effectué l'observation,
- $(h_\varepsilon, h_\sigma)$ représentent les variations des paramètres.

Le milieu initial est constitué de 2 couches, une d'air, et l'autre de conductivité électrique non nulle $\sigma = 4$ et de permittivité électrique relative $\varepsilon = 4$. h_ε, h_σ sont de petites perturbations (h_ε, h_σ sont nuls partout sauf sur une couche située à la profondeur $j = 77$ large de 5 mailles. La figure 19 montre les valeurs de j en fonction de t pour $t \in [0, 1]$. On peut observer que même si les valeurs de la fonctionnelle j sont petites, les variations du milieu apparaissent clairement.

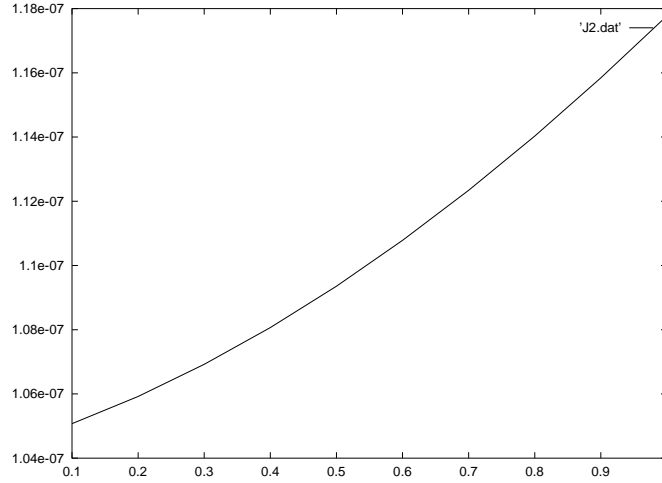


FIG. 19: Fonctionnelle j en fonction de t . Ici on introduit dans le milieu initial à 2 couches une petite couche non conductrice.

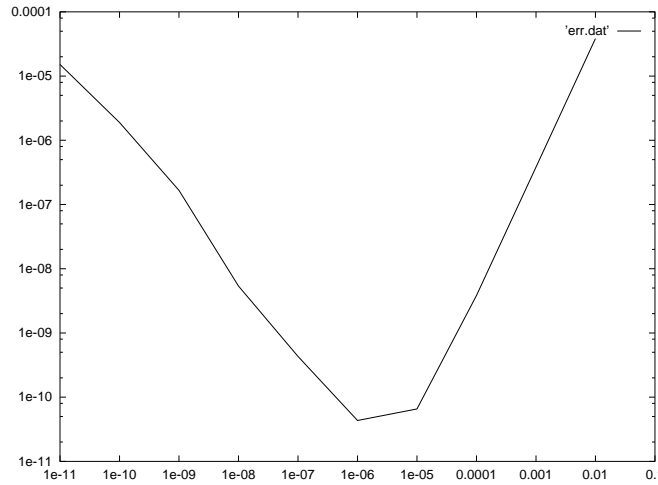


FIG. 20: Erreur relative entre le gradient calculé par état adjoint et le gradient calculé par différences finies.

Pour vérifier le gradient calculé par l'état adjoint, celui ci est calculé également par différences finies. La figure 20 montre l'erreur relative entre les deux en fonction du pas h utilisé pour calculer le gradient par différences finies. On peut constater 1) que l'erreur est faible

(10^{-10} pour $h = 10^{-6}$), 2) que c'est une fonction convexe. Cette forme particulière est due au fait que quand $h > 10^{-4}$ le pas de discrétisation est trop grand pour que le gradient calculé par différences finies soit précis, et que lorsque $h < 10^{-8}$ les erreurs d'arrondies faussent le calcul. Pour h bien choisi $10^{-4} < h < 10^{-8}$ l'erreur est minimum et notre gradient est validé.

La figure 21 est obtenue en sommant sur les points de tir les gradients par rapport à ε . Chaque gradient est calculé par la méthode de l'état adjoint en déplaçant le radar. On peut interpréter ce résultat comme le gradient de la fonction coût somme sur tous les tirs des fonctions coût définies précédemment. Ce procédé est connu en sismique réflexion sous le nom de migration avant sommation. On peut comparer ce résultat à une migration après sommation (voir figure 22). Dans les deux cas on voit apparaître le tuyau, mais le calcul par migration après sommation est beaucoup plus rapide.

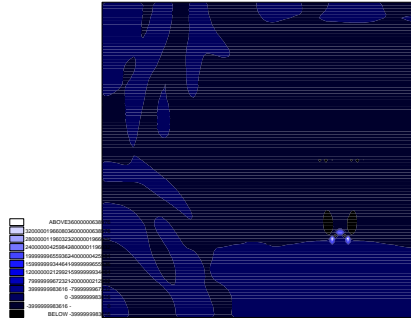


FIG. 21: *Somme des gradients, migration avant sommation.*

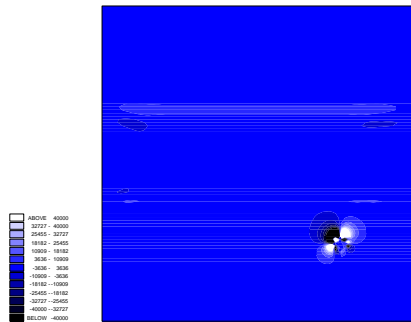


FIG. 22: *Migration après sommation.*

A Annexe

Cette annexe présente les astuces qui ont permis d'écrire la procédure `treeverse` en fortran.

Comme le fortran n'est pas récursif on a donc « triché » en gérant une fausse pile et en utilisant des instruction GOTO.

Structure de la fausse pile : Elle est en fait composée de plusieurs tableaux, un pour chaque variable de la procédure. Tout d'abord, de tableaux de dimension 1 d'entiers :

- `delta_t` pour δ ,
- `theta_t`, pour τ ,
- `beta_t`, pour β ,
- `sigma_t`, pour σ ,
- `phi_t`, pour Φ ,
- `phi_k_t`, pour Φ_k ,
- `k_t` pour κ ,

ensuite, de tableaux de dimension 3 de réels pour les champs :

- `Ey_t` pour E_y ,
- `Hx_t` pour H_x ,
- `Hz_t` pour H_z .

Pour la gérer, on utilise deux compteurs : `cnt` qui s'occupe des tableaux d'entiers et `snap` qui lui s'occupe des tableaux de réels. A chaque appel récursif (appel de `treeverse` dans l'algorithme), on empile les anciennes valeurs dans les tableaux d'entiers, on les dépile a la sortie de l'appel. La pile de réels, elle est utilisée pour simuler les fonctions sauvegarder et charger.

Pour simuler la récursivité, on utilise l'instruction GOTO; en fait on l'utilise deux fois, une première fois pour simuler l'appel à `treeverse` et une seconde pour sortir de l'appel. On utilise un autre GOTO pour faire la boucle tant que.

Références

- [1] A. Taflove and K.R. Umashankar. The Finite-Difference Time-Domain (FD-TD) Method for Electromagnetic Scattering and Interaction Problems. *J. Electromagn. Waves Appl.*, 1(4):363–387, 1987.
- [2] A. Taflove. *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*. Artech House, Boston, MA, available June, 1995.
- [3] K.S. Yee. Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, AP-14(4):302–307, 1966.
- [4] Francis Collino. Conditions aux limites absorbantes pour les équations de maxwell en milieu stratifié. Technical report, INRIA, 1995.
- [5] J.L. Lions R. Dautray. *Analyse Mathématique et calcul numérique*.
- [6] G. Fournet. *Electromagnétisme à partir des équations locales*.
- [7] A. Lothon et P. Fournier. L'imagerie du proche sous-sol à gaz de france. *Communication au Congrès ATG 1994*, page 18, 1994.
- [8] L'imagerie du proche sous-sol à gaz de france. Technical report, GAZ DE FRANCE, 1994.
- [9] G. Pottecher. Le radar géologique et les réseaux urbains. *GAZ d'aujourd'hui*, 12:573–577, 1991.
- [10] E.C. Slob and J.T. Fokkema. Forward modeling of ground penetrating radar data for a horizontally layered earth.
- [11] J.T. Fokkemag and A. Ziolkowski. The critical reflection theorem. *GEOPHYSICS*, 52(7):965–972, 1987.
- [12] Scott D. Nelson. Em modeling for gpir using 3d fdtd modeling codes.
- [13] J. E. Mast and E.M. Johansson. Three-dimensional ground penetrating radar imaging using multi-frequency diffraction tomography.
- [14] E.M. Johansson and J. E. Mast. Three-dimensional ground penetrating radar imaging using synthetic aperture time-domain focusing.
- [15] J.J. Daniels L. Peters, L. Fellow and J.D. Young. Ground penetrating radar as a subsurface environmental sensing tool. *Proceeding of the IEEE*, 82(12):1802–1822, 1994.
- [16] M. Gonzalez and D. Goodfellow. System trades and performance evaluation of ground penetrating radar systems for detecting and localizing buried unexploded ordonance. pages 263–266.
- [17] I. Scherbinin V. Tsymbal A. Gavrilenko A. Kalmykov, I. Fuks. Radar observations of strong subsurface scatterers. a model of backscattering. *IEEE*, pages 1702–11704, 1995.
- [18] P. Borderies M. Jaureguy. Ultra wide band remote sensing of multi-layer cylindrical scatterers. *IEEE*, pages 1454–1456, 1995.

- [19] F.S. Marzano E. Pettinelli, S.E. Beaubien and N. Pierdicca. Comparison of gpr field results from a stratified limestone terrain with model simulations. *IEEE*, pages 1705–1707, 1995.
- [20] Z. Huang R. G. Plumb, K. Demarest and P. Chaturvedi. A three-dimensional fdtd radar simulator for predicting the fields scattered from buried objects. *IEEE*, pages 1699–1701, 1995.
- [21] P. Chaturvedi and R. G. Plumb. Electromagnetic imaging of underground targets using constrained optimization. *IEEE transaction on geoscience and remote sensing*, 33(3):551–561, 1995.
- [22] D.J. Gunton D.J. Daniels and H.F. Scott. Introduction to subsurface radar. *IEE Proceedings*, 135F(4):278–320, 1988.
- [23] G. Junkin and A. Anderson. Limitations in microwave holographic synthetic aperture imaging over a lossy half-space. *IEE Proceedings*, 135F(4):321–329, 1988.
- [24] A. Lothon. Acquisition d’un radar subsurface. présentation du radar gssi sir 10 a. 1993.
- [25] J.E. Hipp. Soil electromagnetic parameters as functions of frequency, soil density, and soil moisture. *Proceeding of the IEEE*, 62(1):98–103, 1974.
- [26] J.L. Davis and A.P. Annan. Ground penetrating radar for high-resolution mapping of soil and rock stratigraphy. *Geophysical Prospecting*, 37:531–551, 1989.
- [27] N. Osumi and K. Ueno. Detection of buried plant. *IEE Proceedings*, 135F(4):330–343, 1988.
- [28] Ronold W. King. Scattering of lateral waves by buried or submerged objects. i. the incident lateral-wave field. *Journal of Appl. Phys.*, 57(5):1453–1472, 1988.
- [29] B.P. Hildebrand. Development of a pipe location system. 1981.
- [30] Maité Jaureguy. *Étude de la diffraction par impulsions électromagnétiques très courtes d’objets en espace libre ou enfouis : Modélisation numérique et extraction des paramètres caractéristiques*. PhD thesis, École Nationale Supérieure de l’Aéronautique et de l’Espace, 1995. Thèse.
- [31] G. Chavent, F. Clément, B. Lavaud, and S. Gómez. Acoustic waveform inversion via migration-based travelttime formulation: synthetic examples. In *Proc. of the Internat. Conf. on Advanced Mathematics, Computation and Application*, 1995.
- [32] William A. Schneider. Integral formulation for migration in two and three dimensions. *Geophysics*, 43:49–76, 1978.
- [33] A. Griewank. Achieving logarithmic growth of temporal and spacial complexity in reverse automatic differentiation. *Optimization Methods and software*, 1:35–54, 1992.
- [34] J. O. Blanch and W. W. Symes. Optimal efficient adjoint calculation. *The Rice Inversion Project annual report*, 1995.



Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unité de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

Éditeur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399